

Suma de Momentos Angulares

En ocasiones en las cuales intervienen más de un momento angular, la base que se obtiene como producto tensorial de los autoestados de momento angular que vimos en el capítulo anterior no es conveniente para representar los autoestados de un Hamiltoniano. Tal es el caso, por ejemplo, cuando existe interacción entre partículas dependiente del espín, o para los electrones en un átomo donde existe una interacción entre su momento angular orbital y su espín. En esas situaciones, es conveniente representar a las funciones de onda en la base correspondiente a los autoestados simultáneos del cuadrado del momento angular total (o suma de momento angular) y la proyección del momento angular total sobre algún eje. En este Capítulo estudiaremos la forma de generar estas bases para dos momentos angulares arbitrarios.

NOTA: los gráficos provisionarios de este capítulo fueron extraídos de los libros de Sakurai y de Cohen-Tannoudji.

12.1. Dos espines 1/2

Consideremos dos partículas de espín 1/2. El espacio de estados de cada una de ellas es $\mathcal{H}_{1/2}$, cuya dimensión es $\dim(\mathcal{H}_{1/2}) = 2$. De esta manera, tal como vimos, el espacio del sistema compuesto es $\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$. En este espacio compuesto, existe una base, que habitualmente se denomina *base desacoplada*, formada por los autoestados comunes de los operadores $S_{1,z} = S_z \otimes \mathbb{1}$ y $S_{2,z} = \mathbb{1} \otimes S_z$. Denotaremos a estos vectores como $\mathcal{B}_{1,2} = \left\{ \left| +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$. En los capítulos anteriores llamamos a estos estados como $\mathcal{B}_{1,2} = \{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$, sin embargo en este capítulo usaremos rotularemos a cada estado con el autovalor de $S_{a,z}/\hbar$ (con $a = 1, 2$).

En el espacio $\mathcal{H}_{1,2}$ podemos definir otra base, que se encuentre asociada a otro CCOC. En efecto, consideremos el espín total definido como

$$\vec{S}_T = \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

Como sucede con cualquier operador que satisface el álgebra del momento angular, se cumple que $[\vec{S}_T^2, S_{T,k}] = 0$ para todo $k = x, y, z$. Asimismo, se cumple que los operadores $\vec{S}_{1,2}^2$ conmutan tanto con \vec{S}_T^2 como con $S_{T,z}$. Esto es fácil de demostrar usando que

$$\vec{S}_T^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

La conmutación de \vec{S}_T^2 con $\vec{S}_{1,2}^2$ surge a partir de notar que estos operadores conmutan con $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ (ya que conmutan con todas las componentes de \vec{S}_1 y de \vec{S}_2). Por otra parte, el hecho de que $S_{T,z}$ conmuta con \vec{S}_1^2 y \vec{S}_2^2 también es inmediato. Es decir podemos asociar autoestados simultáneos a los operadores \vec{S}_T^2 y $S_{T,z}$ con autovalores $\hbar s(s+1)$ y $\hbar m$ respectivamente.

En consecuencia, podemos encontrar dos conjuntos completos de observables que conmutan:

$$\begin{aligned} \text{CCOC}_1 &= \{\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, S_{1,z}, S_{2,z}\}, \\ \text{CCOC}_2 &= \{\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, \vec{S}_T^2, S_{T,z}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, estos no son los únicos CCOC. Hemos visto en este mismo caso (dos espines 1/2) que un conjunto completo alternativo se encuentra representado por los operadores

$$\text{CCOC}_3 = \{\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, S_{1,z} \otimes S_{2,z}, S_{1,x} \otimes S_{2,x}\}.$$

Cada CCOC tiene una base de autoestados asociada. El primero de ellos tiene a la base $\mathcal{B}_{1,2}$, que definimos más arriba. Y como vimos anteriormente, el tercer conjunto tiene a la base de Bell como la base de autoestados comunes. A continuación, encontraremos la base de autoestados del segundo conjunto. Para esto usaremos un método que puede generalizarse para el caso de dos sistemas de espín arbitrario (j_1 y j_2).

En efecto, podemos notar que hay dos vectores de la base $\mathcal{B}_{1,2}$ que también son autoestados del segundo CCOC. Estos son los vectores $|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ y $|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Esto puede demostrarse explícitamente:

$$\begin{aligned} \vec{S}_T^2 |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= (\vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ &= \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2(S_{1,x}S_{2,x} + S_{1,y}S_{2,y} + S_{1,z}S_{2,z}) \right) |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ &= \hbar^2 \left(\frac{3}{2} + 2\frac{1}{4} \right) |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ &= 2\hbar^2 |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

Para demostrar estas últimas identidades es conveniente notar que

$$S_{1,x}S_{2,x} + S_{1,y}S_{2,y} = \frac{1}{2}(S_{1,+}S_{2,-} + S_{1,-}S_{2,+}).$$

En consecuencia, cuando este operador actúa sobre el estado $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ siempre lo anula (obviamente este argumento podrá aplicarse en general para estados con espín j_1 y j_2). Para el caso de espín 1/2 que estamos analizando también podríamos actuar directamente con los operadores $S_{a,x}$ y $S_{a,y}$ y usar que $S_{1,x}S_{2,x}|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ y $S_{1,y}S_{2,y}|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = -|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, con lo cual la contribución de estos términos en la ecuación anterior se cancelan mutuamente.

Por otra parte, cualquier estado que es autoestado de $S_{1,z}$ y de $S_{2,z}$ será también autoestado de la suma de ambos. Es decir, podemos probar que el estado es autoestado de $S_{T,z}$:

$$S_{T,z}|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \hbar|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle.$$

De estas expresiones se deduce que el estado $|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ es autoestado de \vec{S}_T^2 con autovalor $s(s+1)\hbar^2$ con $s = 1$, y también autoestado de $S_{T,z}$ con autovalor $m\hbar$ con $m = 1$. Además, es fácil ver que algo similar sucede con el estado $|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Es decir, que hemos demostrado las siguientes identidades

$$\begin{aligned} |s = 1, m = 1\rangle &= |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle, \\ |s = 1, m = -1\rangle &= |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

recordemos que a la izquierda se encuentran los autoestados del $COCC_2$ y a la derecha autoestados del $COCC_1$.

A partir de estos estados es posible construir todos los autoestados del $CCOC_2$ de la siguiente manera. Si tomamos el estado con espín total $s = 1$ y $m = 1$, podemos obtener otro estado con $s = 1$ y $m = 0$ aplicando el operador $S_{T,-} = S_{1,-} + S_{2,-}$. Como hicimos anteriormente, denotaremos los estados asociados al $CCOC_2$ con los autovalores s y m , es decir, serán de la forma $|s, m\rangle$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_{T,-}|1, 1\rangle &= \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|1, 0\rangle, \\ (S_{1,-} + S_{2,-})|1, 1\rangle &= \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}\left(|+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle\right), \end{aligned}$$

en la primera ecuación vemos cómo actúa $S_{T,-}$ en la base del $CCOC_2$ y en la segunda ecuación su acción en la base del $CCOC_1$. En consecuencia, combinando ambas ecuaciones, deducimos que

$$|s = 1, m = 0\rangle \equiv |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle\right).$$

Entonces, hasta ahora hemos demostrado que es posible construir tres estados que son autoestados del $CCOC_2$. Estos estados son autoestados del espín total con

autovalor $s = 1$ y autovalores de $S_{T,z}$ que son $m = -1, 0, +1$. Es decir, a partir del estado de máxima proyección del momento angular total en la dirección \vec{e}_z hemos construido una familia de tres estados que podemos denominar

$$B_1 = \{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}.$$

¿Cómo se construye el cuarto estado para completar la base de $\mathcal{H}_{1,2}$? Este estado debe ser ortogonal a todos los anteriores. Por lo tanto puede construirse a partir de los mismos estados que intervienen en la combinación lineal que define al estado $|1, 0\rangle$. De ese modo, el estado resultante necesariamente será autovalor de $S_{T,z}$ con autovalor $m = 0$. A partir de las expresiones anteriores es fácil ver que el estado ortogonal al $|s = 1, m = 0\rangle$, que denotamos como $|1, 0\rangle_\perp$, es

$$|1, 0\rangle_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

Este estado es también autoestado de \vec{S}_T^2 pero con autovalor $s = 0$, lo cual puede calcularse explícitamente en forma sencilla. Además, es fácil notar que el estado $|1, 0\rangle_\perp$ es aniquilado por $S_{T,+}$ y, por lo tanto, es el de máxima proyección de $S_{T,z}$. En resumen, hemos construido una base del espacio $\mathcal{H}_{1,2}$ que está formada por los siguientes cuatro vectores (la base se denomina *base acoplada*):

$$\begin{aligned} |s = 0, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |s = 1, m = -1\rangle &= \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |s = 1, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |s = 1, m = 1\rangle &= \left| +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Evidentemente esta base es la unión de los estados de la familia B_1 con el estado de la familia (¡unipersonal!) $B_0 = \{|0, 0\rangle\}$. A la familia B_1 se la conoce como *triplete* mientras que a B_0 *singlete*. En rigor, hemos demostrado que el espacio $\mathcal{H}_{1,2}$, el producto tensorial de los espacios de cada espín, puede escribirse como suma directa de espacios correspondientes a sistemas de $s = 1$ y $s = 0$. Es decir,

$$\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1.$$

12.2. Suma de momentos angulares

Vamos a generalizar aquí la construcción anterior y aprender a sumar dos momentos angulares arbitrarios. Para evitar confusiones introduciremos la siguiente notación: Los autoestados comunes de $\vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, \vec{J}_T^2$ y $J_{T,z}$ se denotarán como $|j_1, j_2, j, m\rangle$. Sin embargo, para no recargar la notación los denominaremos $|j, m\rangle$. Es decir, los estados de la base *acoplada* serán de la forma

$$|j, m\rangle \equiv |j_1, j_2, j, m\rangle.$$

Recordemos entonces que en esta dada esta convención: $\vec{J}_T^2|j, m\rangle = \hbar j(j+1)|j, m\rangle$ y $J_{T,z}|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$. Y para la base *desacoplada*, autoestados de \vec{J}_1^2 , \vec{J}_2^2 , $J_{1,z}$ y $J_{2,z}$, seguiremos con la notación:

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.$$

Además llamaremos

$$j_{\pm} = j_1 \pm j_2,$$

y supondremos que $j_1 \geq j_2$, lo cual podemos hacerlo sin pérdida de generalidad.

Como vimos más arriba, hay dos estados de la base desacoplada que también se encuentran presentes en la base acoplada. Es decir, hay dos estados que tienen una “doble personalidad”. Estos son los estados: a) $j = j_+ = j_1 + j_2$ con $m = j_+ = j_1 + j_2$, y b) $j = j_+ = j_1 + j_2$ con $m = -j_+ = -(j_1 + j_2)$. Estos dos estados son los que tienen máximo valor de j y máxima (o mínima) proyección de \vec{J} a lo largo de la dirección \vec{e}_z , y serán denotados como

$$\begin{aligned} |j_+, j_+\rangle &= |j_1, j_2, j_1, j_2\rangle, \\ |j_+, -j_+\rangle &= |j_1, j_2, -j_1, -j_2\rangle. \end{aligned}$$

Tal como hicimos en el caso de dos partículas de espín 1/2 usaremos el estado $|j_+, j_+\rangle$ como punto de partida para generar una familia de estados. En ese caso, dicha familia era B_1 y tenía $g_1 = 3$ estados, ahora será B_{j_+} y tendrá $g_{j_+} = (2j_+ + 1)$ estados. Veamos cómo puede hacerse esto.

12.2.1. Construcción de todos los estados $|j_+, m\rangle$ (la familia B_{j_+})

Consideremos el estado $|j_+, j_+\rangle$. Si a ese estado le aplicamos el operador $J_{T,-}$ iremos bajando en la escalera de autovalores de $J_{T,z}$ manteniendo el momento angular total $j = j_+$. En efecto, podemos asegurar, tal como vimos en el capítulo anterior, que

$$|j_+, m\rangle = \sqrt{\frac{(j_+ + m)!}{(j_+ - m)! 2j_+!}} \left(\frac{J_{T,-}}{\hbar}\right)^{j_+ - m} |j_+, j_+\rangle.$$

Usando que $J_{T,-} = J_{1,-} + J_{2,-}$ y desarrollando el binomio de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} |j_+, m\rangle &= \sqrt{\frac{(j_+ + m)!}{(j_+ - m)! 2j_+!}} \frac{1}{\hbar^{j_+ - m}} \sum_{k=0}^{j_+ - m} \binom{j_+ - m}{k} J_{1,-}^{j_+ - m - k} J_{2,-}^k |j_1, j_2, j_1, j_2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(j_+ + m)!(j_+ - m)!}{2j_+!}} \sum_{k=0}^{j_+ - m} \frac{1}{k!(j_+ - m - k)!} \sqrt{\frac{2j_1! 2j_2! (j_+ - m - k)! k!}{(2j_1 - j_+ + m + k)!(2j_2 - k)!}} \\ &\quad \times |j_1, j_2, j_1 - j_+ + m + k, j_2 - k\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(j_+ + m)!(j_+ - m)! 2j_1! 2j_2!}{2j_+!}} \sum_{k=0}^{j_+ - m} \frac{|j_1, j_2, j_1 - j_+ + m + k, j_2 - k\rangle}{\sqrt{(j_+ - m - k)! k! (j_1 - j_2 + m + k)!(2j_2 - k)!}} \end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que es posible escribir todos los estados de la forma $|j_+, m\rangle$ para todos los valores de $m \in [-j_+, j_+]$. Cabe notar que en cada paso, el número de términos en la combinación lineal es distinto. Asimismo, para el estado $|j_+, m\rangle$ intervienen *sólo* los estados de la forma $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ con $m_1 + m_2 = m$. Simplificando la expresión anterior llegamos a

$$|j_+, m\rangle = \sqrt{\frac{(j_+ + m)!(j_+ - m)!2j_1!2j_2!}{2j_+!}} \sum_{k=0}^{j_+ - m} \frac{|j_1, j_2, m + k - j_2, j_2 - k\rangle}{\sqrt{(j_+ - m - k)!k!(j_+ + m + k)!(2j_2 - k)!}}$$

Cabe notar que esta expresión involucra una combinación lineal que en apariencia involucra un número de estados que es igual a $j_+ - m$. Sin embargo, el número de estados está acotado por $2j_2 + 1$ (recordemos que la convención que estamos usando es que $j_1 \geq j_2$). Esto se debe a que el operador $J_{2,-}$ aparece elevado a la potencia k y $J_{2,-}^k = 0$ cuando $k \geq 2j_2$ (esto se ve reflejado en la fórmula anterior ya que si allí reemplazamos algún valor de $k > 2j_2$ obtendríamos estados no físicos). En consecuencia, $2j_2 + 1$ es el número máximo de términos que pueden intervenir en la combinación lineal.

Podemos sintetizar el procedimiento que seguimos diciendo que hemos construido una escalera de estados

$$|j_+, j_+\rangle \rightarrow |j_+, j_+ - 1\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |j_+, -j_+ + 1\rangle \rightarrow |j_+, -j_+\rangle.$$

De esta manera, hemos generado $2j_+ + 1$ estados que forman la familia que denominamos

$$B_{j_+} = \{|j_+, m\rangle, -j_+ \leq m \leq j_+\}.$$

Esta construcción es la generalización inmediata del procedimiento que seguimos anteriormente para dos espines $1/2$, y que nos permitió construir la familia del triplete B_1 . Ahora debemos continuar el procedimiento y construir otras familias, que tendrán valores diferentes del momento angular total j .

12.2.2. Construcción de todos los estados $|j_+ - 1, m\rangle$ (la familia $B_{j_+ - 1}$)

Comencemos tomando el segundo estado de la escalera que describimos más arriba: $|j_+, j_+ - 1\rangle$. A este estado llegamos luego de una única aplicación de $J_{T,-}$ al estado $|j_+, j_+\rangle$ ($|j_+, j_+ - 1\rangle = \sqrt{\frac{(2j_+ - 1)!}{(2j_+)!}} \left(\frac{J_{T,-}}{\hbar}\right)|j_+, j_+\rangle$), e involucra la combinación lineal de sólo dos estados de la base desacoplada, ya que $J_{T,-} = J_{1,-} + J_{2,-}$. De forma que es fácil escribir explícitamente dicho estado. En efecto, usando las expresiones anteriores obtenemos

$$|j_+, j_+ - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_+}} |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_+}} |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle.$$

También podemos construir en forma sencilla un estado que sea ortogonal a éste a partir de una combinación lineal de los mismos estados de la base desacoplada. Este estado podemos denotarlo como $|j_+, j_+ - 1\rangle_\perp$ y resulta ser

$$|j_+, j_+ - 1\rangle_\perp = \sqrt{\frac{j_2}{j_+}} |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j_+}} |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle.$$

Tal como hicimos en el caso de dos espines, es posible demostrar que este estado no es otro mas que $|j_+ - 1, j_+ - 1\rangle$. El motivo es obvio: por un lado es trivial observar que este estado es autoestado de $J_{T,z}$ ya que está construido como combinación lineal de estados tales que $m_1 + m_2 = j_+ - 1$. Por otra parte, para ver que ese estado también es autoestado de \vec{J}_T^2 alcanza con demostrar que es aniquilado por el operador de subida $J_{T,+}$. Este cálculo podría hacerse en forma explícita en este caso, pero hacemos notar aquí que existe un argumento general que lo demuestra, y expon-dremos más abajo. En resumen, hemos demostrado que $|j_+, j_+ - 1\rangle_\perp = |j_+ - 1, j_+ - 1\rangle$ y por lo tanto:

$$|j_+ - 1, j_+ - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_+}} |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j_+}} |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle$$

Este estado es tal que $j = j_+ - 1$ y $m = j_+ - 1$, de forma que tiene máxima proyección de momento angular sobre el eje \vec{e}_z . En consecuencia, puede usarse como semilla para generar una nueva familia de estados que obtenemos aplicando el operador de bajada $J_{T,-}$. De esa manera podemos generar una escalera de estados, todos los cuales tienen el mismo valor de $j = j_+ - 1$ (que es heredado del progenitor, ya que el operador de bajada conmuta con \vec{J}_T^2). Estos estados van recorriendo todos los valores posibles de $m \in [-(j_+ - 1), j_+ - 1]$. Es decir, generamos una segunda familia de estados a la que llamamos $B_{j_+ - 1}$ y que está formada por

$$B_{j_+ - 1} = \{|j_+ - 1, m\rangle, -(j_+ - 1) \leq m \leq (j_+ - 1)\}.$$

Esta familia es análoga a la que denominamos B_0 para el caso de dos espines 1/2 (en ese caso $j_+ - 1 = 0$ y tenía un sólo integrante). En este caso el número de integrantes será $\dim(\mathcal{H}_{j_+ - 1}) = 2(j_+ - 1) + 1$. En resumen, hemos generado estados en una escalera descendente de la siguiente manera:

$$|j_+ - 1, j_+ - 1\rangle \rightarrow |j_+ - 1, j_+ - 2\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |j_+ - 1, -(j_+ - 2)\rangle \rightarrow |j_+ - 1, -(j_+ - 1)\rangle.$$

12.2.3. Siguiendo en la escalera descendente de j (generando todas las familias B_j)

Siguiendo la estrategia que delineamos antes, podemos continuar generando estados con distintos valores de j . En efecto, hemos mostrado cómo generar las familias de estados

$$\begin{aligned} B_{j_+} &= \{|j_+, m\rangle, m \in [-j_+, j_+]\}, \\ B_{j_+ - 1} &= \{|j_+ - 1, m\rangle, m \in [-(j_+ - 1), j_+ - 1]\}. \end{aligned}$$

Para generar la familia de estados B_{j_+-2} tomamos los estados de estas familias que tienen el autovalor $m = j_+ - 2$. Estos son $|j_+, j_+ - 2\rangle$ y $|j_+ - 2, j_+ - 2\rangle$ (el tercero y segundo estados de B_{j_+} y B_{j_+-1} respectivamente). Estos estados son combinación lineal de los mismos vectores (los tres vectores de la base desacoplada que cumplen, precisamente, que $m_1 + m_2 = j_+ - 2$). Como estos tres vectores generan un subespacio real de dimensión 3, es posible encontrar un tercer vector que sea ortogonal a los dos anteriores. Por construcción, este estado será también autoestado de $J_{T,z}$ del mismo autovalor que los otros dos. Por otra parte, es fácil ver que este estado será aniquilado por el operador $J_{T,+}$. Para demostrar esto podemos hacer la cuenta en forma explícita (lo cual es trabajoso) o bien podemos argumentar de la siguiente manera general: Al aplicar $J_{T,+}$ al estado ortogonal a los dos anteriores, generaremos necesariamente una combinación lineal de los dos vectores que cumplen $m_1 + m_2 = j_+ - 1$. Este nuevo vector debería tener el mismo valor de j que su progenitor y por lo tanto debería ser un estado ortogonal a los dos anteriores. Sin embargo, como el espacio generado por los vectores que cumplen con la condición $m_1 + m_2 = j_+ - 1$ tiene dimensión 2 no hay lugar para un tercer vector ortogonal, por lo cual este vector tiene que ser necesariamente nulo. En conclusión, demostramos rigurosamente que este tercer vector es autoestado de m con autovalor $j_+ - 2$ y que es aniquilado por $J_{T,+}$. Por consiguiente, este estado debe ser autoestado de \vec{J}_T^2 con autovalor $j = j_+ - 2$. Aplicando sucesivamente el operador de bajada $J_{T,-}$ a este estado construimos la tercera familia

$$B_{j_+-2} = \{|j_+ - 2, m\rangle, -(j_+ - 2) \leq m \leq (j_+ - 2)\}.$$

La pregunta que surge naturalmente ahora es: ¿Cuántas familias podremos generar de este modo? Que resulta ser equivalente a otra: ¿Cuáles son los valores posibles de j que podemos obtener a partir de j_1 y j_2 ?

Antes de dar la respuesta observemos lo siguiente. Como dijimos antes, el número de vectores que aparece en la combinación lineal que permite escribir el estado $|j_+, m\rangle$ crece desde 1 para $m = j_+$, hasta llegar a $2j_2 + 1$ para $m = j_-$ (o sea, el estado $|j_+, j_-\rangle$ es siempre combinación lineal de $2j_2 + 1$ estados). A partir de ese estado, al aplicar el operador de bajada, el número de términos en la combinación lineal se mantiene constante (e igual a $2j_2 + 1$) hasta llegar al estado con $m = -j_-$ (o sea, al estado $|j_+, -j_-\rangle$). A partir de este estado el número de términos en la combinación lineal se va reduciendo hasta llegar a ser nuevamente 1 para el estado $|j_+, -j_+\rangle$. Podemos ver esto en un gráfico para el plano (m_1, m_2) que mostramos en la Fig. 12.1 con $j_1 = 2$ y $j_2 = 1$. Allí cada punto de coordenadas (m_1, m_2) corresponde a un vector $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$. Los puntos asociados a estados físicos viven dentro de un rectángulo delimitado por $m_i = \pm j_i$. Los puntos a lo largo de la línea punteada corresponden al caso $m = m_1 + m_2$, es decir la cantidad de puntos a lo largo de estos segmentos es igual a la cantidad de estados que intervienen en la combinación lineal de un estado $|j, m\rangle$.

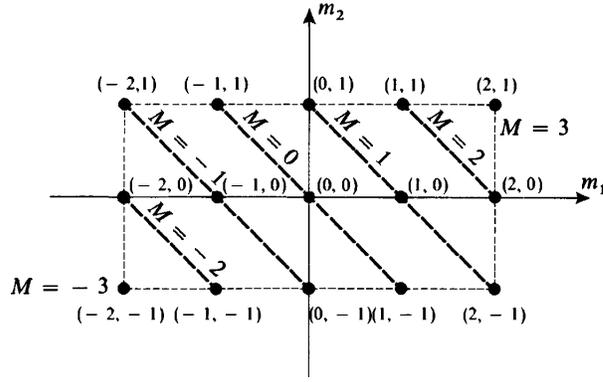


Figura 12.1: Método gráfico para visualizar la cantidad de familias con j definido que es posible generar a partir de dos momentos j_1 y j_2 . En la figura $j_1 = 2$ y $j_2 = 1$, además las líneas punteadas corresponden a $M = m_1 + m_2$, en el texto usamos $m = M$.

Esta observación nos permitirá responder la pregunta sobre el número de familias que podremos generar. En efecto, la cantidad de estados con $m = m_1 + m_2$ es igual a la cantidad de estados ortogonales que podemos generar con un mismo m pero j diferente (ya es que igual a la dimensión del subespacio generado con m fijo). Es decir, para $m = j_+$, podemos generar un sólo estado, el correspondiente a la familia con $j = j_+$; para $m = j_+ - 1$ podemos generar dos estados, los correspondientes a la familia con $j = j_+$ y $j = j_+ - 1$; para $m = j_+ - 2$ podemos generar tres estados, los correspondientes a la familia con $j = j_+$, $j = j_+ - 1$ y $j = j_+ - 2$, etc. Hasta que lleguemos a $m = j_+ - 2j_2 = j_-$ donde podemos generar $2j_2 + 1$ estados, los correspondientes a la familia con $j = j_+$, $j = j_+ - 1, \dots, j = j_-$. A partir de allí esta cantidad permanece constante y no podremos agregar más familias j . En efecto, nunca podremos generar más de $2j_2 + 1$ familias. Como cada familia está asociada a un valor distinto de j que decrece desde $j = j_+$, concluimos que los posibles valores de j son tales que $j_- \leq j \leq j_+$. O sea, en general

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2.$$

Es fácil ver que si contamos el número de vectores en estas familias obtenemos la dimensión del espacio producto $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ (o sea, $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$). Por cierto, se puede verificar explícitamente a partir de la sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_-}^{j_+} (2j + 1) &= \sum_{j'=0}^{2j_2} (2(j' + j_-) + 1) \\ &= (2j_2 + 1)2j_2 + (2j_- + 1)(2j_2 + 1) \\ &= (2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1). \end{aligned}$$

Todo lo anterior implica que el espacio producto $\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ puede obtenerse como suma directa de los espacios generados por las familias de estados b_j . Es decir

$$\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \oplus_{j=j_-}^{j_+} \mathcal{H}_j.$$

12.2.4. Acoplamiento espín órbita.

Esta construcción puede hacerse de manera completa en un caso simple pero que es importante. Supongamos que sumamos el momento angular orbital y el de espín $1/2$. En ese caso tenemos $j_1 = l$ y $j_2 = 1/2$. Entonces, sólomente dos términos sobreviven en la suma que permite expresar cualquiera de los estados $|j, m\rangle$ de la familia B_{j_+} . En efecto, las ecuaciones anteriores pueden reescribirse como

$$|l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{(l + \frac{1}{2} + m)!(l + \frac{1}{2} - m)!}{2l + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{(l + \frac{1}{2} - m)!(l - \frac{1}{2} + m)!}} |l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{(l - \frac{1}{2} - m)!(l + \frac{1}{2} + m)!}} |l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right),$$

o sea que finalmente los autoestados del momento angular total (suma del momento angular orbital y el espín) son

$$|l + \frac{1}{2}, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} \left(\sqrt{\frac{(l + \frac{1}{2} + m)!}{(l - \frac{1}{2} + m)!}} |l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{(l + \frac{1}{2} - m)!}{(l - \frac{1}{2} - m)!}} |l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right),$$

lo que puede simplificarse aún mas para llegar a

$$|l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} + m}{2l + 1}} |l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} - m}{2l + 1}} |l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Los autoestados del momento angular total para una partícula de espín $1/2$ tienen funciones de onda que son de la forma (un vector de dos componentes, una para cada proyección del espín):

$$\mathcal{Y}_{l+\frac{1}{2}}^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} + m} Y_l^{(m-\frac{1}{2})}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l + \frac{1}{2} - m} Y_l^{(m+\frac{1}{2})}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

donde $m = -(l + \frac{1}{2}), \dots, l + \frac{1}{2}$. Los estados con valor del momento angular total $j = l - \frac{1}{2}$ se obtienen a partir de los anteriores encontrando el estado ortogonal. O sea:

$$\mathcal{Y}_{l-\frac{1}{2}}^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{l + \frac{1}{2} - m} Y_l^{(m-\frac{1}{2})}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l + \frac{1}{2} + m} Y_l^{(m+\frac{1}{2})}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

12.3. Coeficientes de Clebsch-Gordan

En las secciones anteriores hemos construido dos bases para el espacio $\mathcal{H}_{1,2}$: la base desacoplada y la acoplada (esta última es la unión de todos los vectores

de las familias B_j). Cada base está asociada a un CCOC. La base desacoplada está asociada al $CCOC_1$ y la base acoplada al $CCOC_2$:

$$\begin{aligned} B_D &= \{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle; -j_1 \leq m_1 \leq j_1, -j_2 \leq m_2 \leq j_2\}, \\ B_A &= \{|j, m\rangle; |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, -j \leq m \leq j\}. \end{aligned}$$

Estas son dos bases ortonormales y completas del mismo espacio de estados. Por lo tanto, el operador identidad puede descomponerse como suma de proyectores sobre los vectores de ambas bases. Es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2|, \\ \mathbb{1} &= \sum_j \sum_m |j, m\rangle \langle j, m|. \end{aligned}$$

Asimismo, es evidente que es posible escribir a los vectores de una base como combinación lineal de los vectores de la otra. Por ejemplo, usando la descomposición de la identidad que figura más arriba, tenemos

$$\begin{aligned} |j, m\rangle &= \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle, \\ |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= \sum_{j, m} |j, m\rangle \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle. \end{aligned}$$

Los coeficientes que aparecen en estas combinaciones lineales se denominan *coeficientes de Clebsch-Gordan*. Estos son simplemente los productos escalares de los vectores de una base con los de la otra, es decir, los elementos de las matrices de cambio de base. Estos coeficientes tienen propiedades muy importantes (algunas de las cuales serán usadas más adelante). En particular, podemos destacar una de ellas: todos estos coeficientes pueden ser elegidos como *números reales*. Esto surge a partir de lo que vimos más arriba: todos los estados de la forma $|j, m\rangle$ pueden obtenerse como combinaciones lineales de los elementos de la base B_D usando solamente coeficientes reales, lo cual implica que los coeficientes de C-G son reales. En consecuencia, los mismos coeficientes aparecen en la matriz cambio de base y en su inversa (la matriz de cambio de base en este caso es ortogonal). De su definición se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle \\ \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= 0 && \text{si } m_1 + m_2 \neq m \\ \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= 0 && \text{si } j < |j_1 - j_2| \text{ o } (j_1 + j_2) < j \end{aligned}$$

12.4. Relaciones de recurrencia para los coeficientes de Clebsch-Gordan

Entre las propiedades importantes de los coeficientes de Clebsch-Gordan se satisfacen relaciones de recurrencia que los relacionan entre sí. Estas relaciones son

consecuencia de lo que vimos más arriba. En efecto, se obtienen a partir de notar que los distintos estados de la forma $|j, m\rangle$ pueden vincularse entre sí por los operadores de subida y bajada $J_{T,\pm}$.

$$J_{T,\pm}|j, m\rangle = (J_{1,\pm} + J_{2,\pm}) \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle &= \sum_{m'_1 m'_2} \left(\sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} |j_1, j_2, m'_1 \pm 1, m'_2\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} |j_1, j_2, m'_1, m'_2 \pm 1\rangle \right) \\ &\quad \times \langle j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m\rangle \end{aligned}$$

Multiplicando a continuación por $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 |$, y usando las relaciones entre los coeficientes que vimos en la sección anterior, podemos ver que el lado derecho es diferente de cero sólo si $m_1 = m'_1 \pm 1$ junto con $m_2 = m'_2$ para el primer término, y si $m_1 = m'_1$ junto con $m_2 = m'_2 \pm 1$ para el segundo. De esta manera,

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \pm 1\rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | j, m\rangle \\ &\quad + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j, m\rangle \end{aligned}$$

Estas relaciones de recurrencia junto con la condición de normalización determinan unívocamente (a menos de la convención de signo) los coeficientes de C-G. En particular podemos notar que las ecuaciones anteriores relacionan entre sí a tres coeficientes. Para ello veamos la representación de estas relaciones en un plano $m_1 - m_2$ (donde m_1 corresponde al eje horizontal y m_2 al vertical). La Fig. 12.2 muestra esquemáticamente las relaciones que se obtienen a partir de las ecuaciones anteriores, donde $J_{T,+}$ conecta tres coeficientes, y $J_{T,-}$ otros tres coeficientes.

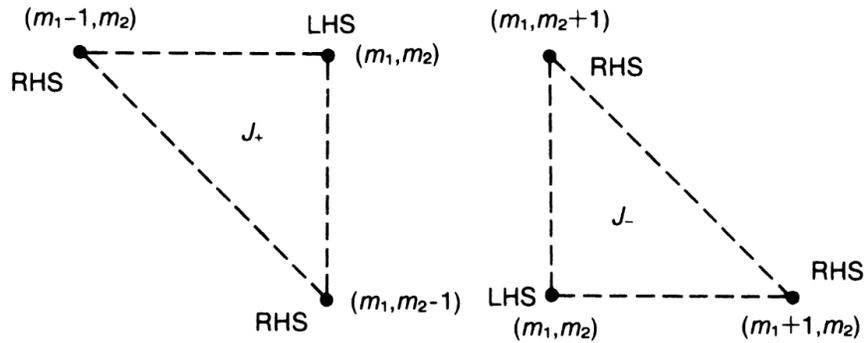


Figura 12.2: Relaciones entre los coeficientes de C-G en el plano $m_1 - m_2$. RHS (LHS) corresponde al lado derecho (izquierdo) de las relaciones de recurrencia.

Para ver cómo obtener los todos los coeficientes vamos a graficar el área del plano $m_1 - m_2$ donde los coeficientes de C-G son no nulos. Dados j_1, j_2 y j , los coeficientes son diferentes de cero si $|m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2$ y $-j \leq m_1 + m_2 \leq j$, esta región se encuentra representada la Fig. 12.3 (lado izquierdo). Para generar todos los coeficientes, comenzaremos con el asociado al punto A de la figura. Utilizando la relación de recurrencia con $J_{T,-}$ relacionaremos este punto con otros dos: B y x en la Fig. 12.3 (lado derecho). Pero el coeficiente asociado al punto x se encuentra fuera del área permitida, de manera que ese término es nulo. Es decir, la relación de recurrencia con $J_{T,-}$ relaciona sólo los coeficientes asociados a los puntos A y B, y por lo tanto podemos obtener el coeficiente de B en términos del de A. A continuación podemos ver que los puntos A, B y D forman un triángulo que podemos asociar a la relación de recurrencia con $J_{T,+}$. De esta manera, podemos obtener el coeficiente asociado al punto D en función del A. Luego seguimos con el E, y procediendo de esta manera es posible obtener todos los coeficientes en términos del asociado al punto A. Para determinar este último coeficiente, recurriremos a la condición de normalización de $|j, m\rangle$

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} |\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle|^2 = 1$$

y finalmente fijaremos la fase global la fijamos por convención.

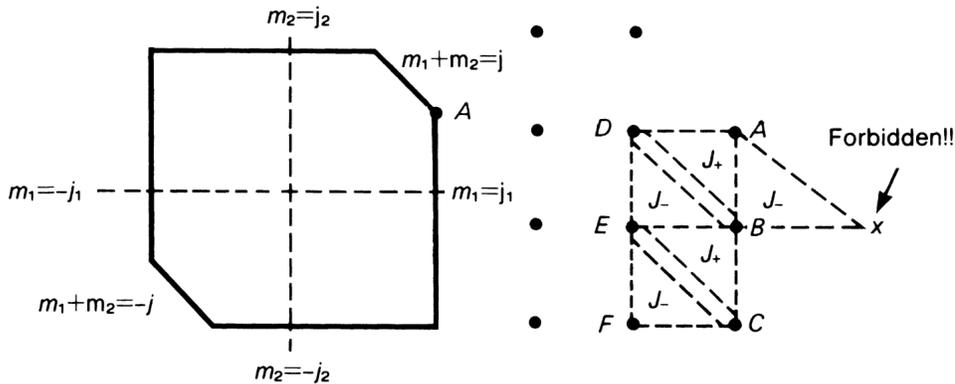


Figura 12.3: Gráfica para hallar los coeficientes de C-G a partir de las relaciones de recurrencia.