Apuntes de las clases de Física Cuántica
Juan Pablo Paz 2020

10

27 de mayo de 2020

Cuantización del campo electromagnético

En este capítulo estudiaremos cómo cuantizar el campo electromagnético. Estudiaremos la descripción de ondas lejos de cargas y fuentes, es decir de ondas electromagnéticas. Hallaremos que la descripción cuántica se realizará en términos de las excitaciones elementales que llamaremos *fotones*. Para hacerlo, veremos que debemos asociar a cada modo del campo un oscilador armónico.

Comenzamos por un repaso de las ecuaciones de Maxwell y su descripción en términos del vector potencial en el *gauge* de Coulomb.

10.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen completamente al electromagnetismo clásico. Estas son:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad &, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\,, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad &, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J} \end{aligned} \tag{10.1}$$

donde ρ es la densidad de carga, $\vec{J}$ la densidad de corriente eléctrica y $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

Las dos ecuaciones de Maxwell en las que no aparecen las cargas nos brindan mucha información. Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, el teorema de Stokes implica que siempre existe un campo $\vec{A}$ tal que $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Reemplazando esta expresión en la ecuación de Faraday podemos transformarla en la siguiente: $\vec{\nabla}\times(\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) = 0$.

De esta ecuación se deduce que el campo $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ es irrotacional y por lo tanto, existe una función escalar Φ tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$. Obviamente el campo $\vec{A}$ está definido siempre a menos de un gradiente. O sea, que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a la transformación $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ y $\Phi \to \Phi - \partial\Lambda/\partial t$, para toda funcion $\Lambda(\vec{r}, t)$ (invariancia de gauge). Teniendo en cuenta esto, podemos elegir Λ de modo tal que siempre valga la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ Esta elección corresponde a lo que se conoce como el *gauge* de Coulomb, que usaremos aquí.

Todavía no hemos usados las dos ecuaciones de Maxwell en las que aparecen las fuentes. Ellas nos permitirán determinar los campos Φ y $\vec{A}$. En ausencia de fuentes, la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ implica que $\nabla^2\Phi = 0$ (usando que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) por lo cual podemos tomar $\Phi = 0$ siempre. Por último, la ley de Ampere implica que $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\partial^2\vec{A}/\partial^2 t = 0$. Usando ahora que $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$, obtenemos finalmente que el potencial vector satisface

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2 t} = 0. \tag{10.2}$$

Por lo tanto, $\vec{A}$ evoluciona de acuerdo una la ecuación de ondas en la que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de propagación.

10.1.1. Coordenadas Generalizadas

Resulta conveniente reescribir las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en términos de modos $\vec{A}(\vec{k}, t)$. Para esto definimos las la transformada de Fourier

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}}\Big(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{A}(\vec{k}, t) + c.c.\Big),$$

donde $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|c$. La inclusión en esta fórmula del factor $\sqrt{\hbar/2\epsilon_0\omega_k}$ es arbitraria y equivale a definir las unidades de $\vec{A}(\vec{k}, t)$. Para determinar estas unidades puede razonarse de la siguiente manera: Más abajo veremos que la cantidad $\epsilon_0 V|\vec{E}^2$ tiene unidades de energía. En consecuencia, debe valer que $\int d^3\vec{k}|\vec{A}(\vec{k}, t)|^2$ sea adimensional, lo que implica que las unidades de $\vec{A}(\vec{k}, t)$ son $L^{3/2}$.

Para identificar los grados de libertad físicos del campo es importante notar que para cada vector de onda $\vec{k}$, el vector $\vec{A}(\vec{k})$ tiene solamente dos componentes, las cuales son perpendiculares a $\vec{k}$ (ya que, como vimos más arriba la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ implica que $\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}, t) = 0$). Si tomamos dos vectores cualesquiera $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, en el plano perpendicular a $\vec{k}$, el vector potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ puede escribirse siempre como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0\omega_k}}\Big(\vec{e}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}A_{\vec{k},\lambda}(t) + c.c\Big). \tag{10.3}$$

A partir del potencial vector se pueden calcular trivialmente los campos eléctricos y magnéticos que resultan ser:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0}}\Big(\vec{e}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}A_{\vec{k},\lambda}-c.c\Big).\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= -i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}}\vec{k}\times\Big(\vec{e}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}A_{\vec{k},\lambda}-c.c\Big).\end{aligned}$$

Por último, es importante notar que en la teoría clásica de Maxwell hay ciertas magnitudes conservadas que, naturalmente, se originan en las simetrías de dichas ecuaciones. En particular, la invariancia ante traslaciones temporales y espaciales implican la conservación de la energía y el momento del campo electromagnético, que resultan ser

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\ \Big(\vec{E}^2(\vec{r})+c^2\vec{B}^2(\vec{r})\Big).\\ \vec{\mathcal{P}} &= \epsilon_0\int d^3\vec{r}\ \vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}).\end{aligned}$$

10.1.2. Campo en una cavidad: modos discretos.

Es importante considerar el caso de campos atrapados en una cavidad de volumen $V = L^3$ (por ejemplo, un cubo cuyos lados tienen longitud L). Si imponemos condiciones de contorno periódicas, las componenetes del vector de onda serán $k_j = 2\pi n_j/L$. En ese caso todas las integrales se reducen a sumas sobre todas los vectores $\vec{n}$ cuyas componentes son enteros no negativos. Para obtener las expreiones de los campos en este caso, debemos reemplazar:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V}\sum_{\vec{n}} \tag{10.4}$$

en las ecuaciones anteriores. Asimismo, la amplitud $A_{\vec{k},\lambda}$ debe ser reemplazada como

$$A_{\vec{k},\lambda} \rightarrow \frac{V^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}a_{\vec{n},\lambda} \tag{10.5}$$

donde $a_{\vec{n},\lambda}$ es adimensional.

En ese caso, el potencial vector y los campos electricos y magnéticos se escriben simplemente como

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{n},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}}\Big(\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}(t)+c.c\Big), \qquad (10.6)\\
\vec{E}(\vec{r},t) &= i\sum_{\vec{n},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 V}}\Big(\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}(t)-c.c\Big),\\
\vec{B}(\vec{r},t) &= i\sum_{\vec{n},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}}\vec{k}\times\Big(\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{\vec{k}_{\vec{n}},\lambda}(t)-c.c\Big),
\end{aligned}
$$

10.2. Cuantización del campo.

Para cuantizar el campo electromagnético tenemos que proceder tal como lo hacemos en cualquier otro caso. Debemos encontrar las coordenadas generalizadas del sistema y asociarlas a operadores en un espacio de Hilbert.

Usando las expresiones 10.3 (o *mutatis mutandis* 10.6) podemos demostrar fácilmente para que el campo satisfaga la ecuación de onda se debe cumplir que $\dot{A}_{\vec{k},\lambda}(t)+ i\omega_{\vec{k}}A_{\vec{k},\lambda}(t)=0$, o equivalentemente

$$\ddot{A}_{\vec{k},\lambda}(t)+\omega_{\vec{k}}^2A_{\vec{k},\lambda}(t)=0. \qquad (10.7)$$

Es decir, el campo electromagnético (en ausencia de fuentes) no es más que un conjunto de infinitos osciladores armónicos. En este sentido, podemos decir que las coordenadas generalizadas del campo son las amplitudes $A_{\vec{k},\lambda}$: dos funciones escalares complejas para cada modo. Su rol es totalmente análogo al de las coordenadas complejas $A=(\tilde{x}+i\tilde{p})/\sqrt{2}$ y $A^*=(\tilde{x}-i\tilde{p})/\sqrt{2}$ que pueden usarse para describir al oscilador armónico ordinario y que como vimos, se cuantizan imponiendo la relación de conmutación $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger]=\mathbb{1}$ para cada modo.

Es decir, en el caso continuo (volumen infinito) las amplitudes $A_{\vec{k},\lambda}$ son operadores que deberán satisfacer relaciones de conmutación análogas a las que satisfacen las amplitudes correspondientes de los osciladores armónicos. Es decir:

$$[\boldsymbol{A}_{\vec{k},\lambda},\boldsymbol{A}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}]=\mathbb{1}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\lambda,\lambda'}. \qquad (10.8)$$

Tal como ocurre con cualquier sistema cuántico, la evolución temporal puede describirse en la representación de Heisenberg o en la de Schroedinger. La primera, aquella en la que los operadores evolucionan y los estados son invariables, es más natural en la teoría de campos. En ese caso los operadores $\boldsymbol{A}_{\vec{k},\lambda}$ son funciones del tiempo que cumplen la ecuación de Heisenberg, que es:

$$\dot{\boldsymbol{A}}_{\vec{k},\lambda}+i\omega_{\vec{k}}\boldsymbol{A}_{\vec{k},\lambda}=0. \qquad (10.9)$$

En el caso de un campo en una cavidad, los operadores $\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda}$ deben satisfacer

$$[\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda},\boldsymbol{a}^\dagger_{\vec{n}',\lambda'}]=\mathbb{1}\delta_{\vec{n},\vec{n}'}\,\delta_{\lambda,\lambda'}. \qquad (10.10)$$

Entonces, los operadores $\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda}$ y $\boldsymbol{a}^\dagger_{\vec{n},\lambda}$ son operadores de creación y destrucción, tal como los de un oscilador armónico usual. Como tenemos un oscilador para cada modo $\{\vec{n},\lambda\}$, podemos construir una base completa del conjunto de estados cuánticos del campo electromagnético usando vectores que sean autoestados de todos los peradores de la forma $\boldsymbol{N}_{\vec{n},\lambda} = \boldsymbol{a}^\dagger_{\vec{n},\lambda}\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda}$. Estos estados pueden escribirse como

$$\otimes_{\vec{n}\lambda} |m_{\vec{n},\lambda}\rangle = |m_{\vec{n}_1,\lambda_1},\ m_{\vec{n}_1,\lambda_2},\ m_{\vec{n}_2,\lambda_1},\ \ldots\rangle, \tag{10.11}$$

para todos los valores de $m_{\vec{n},\lambda} \geq 0$. Diremos que este estado tiene $m_{\vec{n},\lambda}$ fotones en el modo $\{\vec{n},\lambda\}$ del campo.

¿Qué propiedades tienen los fotones? Para entenderlas, podemos escribir la energía y el momento del campo electromagnético en función de los operadores $a_{\vec{n},\lambda}$. Estos se escriben como

$$\boldsymbol{H} = \sum_{\vec{n},\lambda} \hbar\omega_{\vec{n}} \left(\boldsymbol{a}^\dagger_{\vec{n},\lambda}\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda} + \frac{1}{2}\right), \tag{10.12}$$

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_{\vec{n},\lambda} \hbar\vec{k}_{\vec{n}}\, \boldsymbol{a}^\dagger_{\vec{n},\lambda}\boldsymbol{a}_{\vec{n},\lambda}. \tag{10.13}$$

Las propiedades de los fotones son muy sencillas e interesantes. En efecto, el estado con m fotones en el modo $\{\vec{n},\lambda\}$ es un autoestado de la energía del campo con autovalor $\hbar\omega_{\vec{n}}(m+1/2)$ y también es un autoestado del momento con autovalor $m\ \hbar\vec{k}_{\vec{n}}$. Por ese motivo, podemos decir que los fotones son excitaciones del campo electromagnético que transportan momento lineal y energía. En ese sentido se comportan como partículas (y pueden ser detectados y producidos de a uno por vez). Puede verse también que los fotones transportan momento angular, pero eso no será tratado en este curso.

Notamos en este punto, que hemos llegado a la hipótesis de Planck: que la energía de campo electromagnético viene en paquetes de $\hbar\omega$. Vemos que, sin embargo, que aparece un termino extra, una constante $\hbar\omega/2$ que pone un piso de energía aún cuándo no hay excitaciones del campo electromagnético. Es decir, ¡el vacío no tiene energía nula!

10.2.1. El estado de vacío

El estado de vacío es aquel estado en donde no hay fotones. Todos los osciladores del campo están en su estado fundamental. Ese estado será denotado como $|0\rangle$. Obviamente, el estado de vacío es un autoestado del operador de momento del campo con autovalor nulo. Sin embargo, es un autoestado de la energía del campo con un autovalor infinito! En efecto,

$$\mathcal{H}|0\rangle = \sum_{\vec{n},\lambda} \frac{\hbar\omega_{\vec{n}}}{2}. \tag{10.14}$$

Al sumar sobre infinitos modos, tenemos una energía de vacío infinita. Por suerte, en la mayoría de los casos esta energía infinita puede ignorada ya que es simplemente una constante aditiva (y la energía siempre está definida a menos de una constante). En otras palabras, podemos referir todas las energías a la energía del vacío electromagnético (fijando ahí el cero de las energías). Esto es correcto siempre y cuando está energía sea verdaderamente constante. Y esto no siempre es así .

Por ejemplo, en una cavidad de longitud L los vectores de onda $\vec{k}$ están cuantizados y toman valores que son múltiplos enteros de π/L. Es decir, los modos que resuenan tienen frecuencias angulares $\omega_m = m\pi c/L$, donde m pertenece a los enteros. La energía de vacío de esta cavidad será entonces

$$E_{vac} = \sum_m \frac{\hbar\omega_m}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hbar m\pi c}{L} = \frac{\hbar\pi c}{L}\sum_{m=1}^{\infty} m, \tag{10.15}$$

que claramente es infinito. Sin embargo, analizando esta dependencia, vemos que la energía del vacío en una cavidad formada por dos placas paralelas perfectamente conductoras disminuye con la distancia entre placas. Para calcular cómo cambia la energía en función de la distancia L es necesario restar dos magnitudes que son ambas infinitas. Esto requiere utilizar algún "método de regularización" que no describiremos acá [1]. Sin embargo notamos que el resultado anterior implica que para las placas es energéticamente favorable acercarse, lo cual implica que sobre ellas aparecerá una fuerza, llamada fuerza de Casimir, cuyo origen está en la estructura no trivial del vacío del campo electromagnético.

Más adelante veremos algunas otras consecuencias no triviales de la interacción entre átomos y el campo electromagnético y mostraremos que la interacción con el campo tiene consecuencias sobre el átomo aún en ausencia de fotones.

10.2.2. Fotones en una cavidad con un único modo

Por último, es conveniente analizar el caso del campo electromagnético atrapado en una cavidad que puede almacenar un único modo. Supondremos que el vector de onda $\vec{k}$ apunta en la dirección del eje e_z. Asimismo, supondremos que hay un único modo relevante, que es el de longitud de onda más larga $|\vec{k}| = 2\pi/L$ y que la polarización del campo es lineal. En ese caso, los campos son (en la representación de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{r},t) &= \frac{E_0}{\omega}\mathrm{e}_x\Big(e^{-i2\pi z/L}\boldsymbol{a}(t) - e^{i2\pi z/L}\boldsymbol{a}^\dagger(t)\Big),\\
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r},t) &= -iE_0\mathrm{e}_x\Big(e^{-i2\pi z/L}\boldsymbol{a}(t) - e^{i2\pi z/L}\boldsymbol{a}^\dagger(t)\Big),\\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{r},t) &= -i\frac{E_0}{c}\mathrm{e}_y\Big(e^{-i2\pi z/L}\boldsymbol{a}(t) - e^{i2\pi z/L}\boldsymbol{a}^\dagger(t)\Big),\\
E_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}
\end{aligned}$$

[1] Por ejemplo, para dos placas paralelas, la fuerza es $F_c = \pi\hbar c/240L^4$. Dejamos al lector la inquietud obtener este resultado y de calcular cuánto vale para placas separadas por 1 mm y 100 nm.

donde $\boldsymbol{a}^\dagger(t) = \boldsymbol{a}^\dagger \exp(i\omega t)$ es el operador de creación de fotones. Si quisiéramos trabajar en la representación de Schroedinger debemos dejar de lado la dependencia temporal de estos operadores.

En el estado de vacío los valores medios de todos los campos son nulos $\langle 0|\vec{E}|0\rangle = \langle 0|\vec{B}|0\rangle = 0$. Cómo era de esperar, siguiendo la analogía con el oscilador armónico.

También igual que para el oscilador armónico, las dispersiónes no se anulan para el estado fundamental y tenemos que

$$\langle 0|\vec{\boldsymbol{E}}^2(z,t)|0\rangle = E_0^2 = c^2\langle 0|\vec{\boldsymbol{B}}^2(z,t)|0\rangle.$$

Es decir, el estado de vacío no es total mente inerte, tiene fluctuaciones.

En analogía total con lo que hicimos para los osciladores armónicos, podemos definir estados coherentes del campo electromagnético como aquellos que son autovectores de los operadores de destrucción. En esos estados, los valores medios de los operadores de campo son no nulos y evolucionan en el tiempo tal como lo predicen las ecuaciones de Maxwell.