

El oscilador armónico

El oscilador armónico es uno de los sistemas favoritos de los físicos por varios motivos. Sin duda, uno de ellos es que este sistema es resoluble analíticamente en el caso clásico y también en el caso cuántico. Además, tiene múltiples aplicaciones: un oscilador armónico mecánico sirve para describir aproximadamente el movimiento de innumerables sistemas cerca de su posición de equilibrio. Este es el caso tanto para el análisis y la descripción de sistemas clásicos así como cuánticos. Como veremos en el capítulo siguiente, la naturaleza, sorprendentemente, nos provee de un oscilador armónico ideal: la luz. Como veremos, el campo electromagnético puede ser descrito como una colección de un número infinito de osciladores armónicos.

En este capítulo estudiaremos las propiedades del oscilador armónico cuántico. Pero lo haremos introduciendo un método algebraico que nos permitirá encontrar tanto los autovalores como los autovectores del Hamiltoniano de manera directa, sin resolver ninguna ecuación diferencial.

NOTACIÓN: En este capítulo indicaremos a los operadores en *negrita-italica*, en vez de usar el usual “sombbrero”.

9.1. El del oscilador armónico cuántico

El Hamiltoniano del oscilador armónico es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2$$

Este Hamiltoniano puede reescribirse de la siguiente manera, haciendo aparecer “artificialmente” la constante de Planck \hbar . En efecto, con la constante de Planck y las constantes que aparecen en el Hamiltoniano podemos definir una escala de

energía $E_0 = \hbar\omega$, una escala de longitudes $\sigma_x = \sqrt{\hbar/m\omega}$ y una de momentos $\sigma_p = \hbar/\sigma_x = \sqrt{\hbar m\omega}$. En términos de estas variables el Hamiltoniano se puede reescribir de la siguiente manera

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (\tilde{p}^2 + \tilde{x}^2)$$

donde la posición y momento adimensionales son $\tilde{x} = x/\sigma_x$ y $\tilde{p} = p\sigma_x/\hbar$. En el caso cuántico, la posición y el momento son operadores y también lo son las variables adimensionales \tilde{x} y \tilde{p} . La relación de conmutación canónica $[x, p] = i\hbar\mathbb{1}$ se traduce para las variables adimensionales es

$$[\tilde{x}, \tilde{p}] = i\mathbb{1}. \quad (9.1)$$

9.1.1. Operadores de creación y destrucción

A partir de las variables adimensionales \tilde{x} y \tilde{p} podemos definir dos nuevos operadores que llamaremos de creación a^\dagger y destrucción a por razones que quedarán claras más adelante. Veremos que estos nuevos operadores nos proveerán una herramienta poderosa para analizar las propiedades del oscilador armónico cuántico. Nos permitirán, por ejemplo, encontrar sus autoestados, autovalores y calcular valores medios sin necesidad de realizar integrales de ningún tipo.

Los definimos estos nuevos operadores de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + i\tilde{p}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} - i\tilde{p}). \quad (9.2)$$

De dónde las podemos también escribir la relaciones inversas para expresar posición y momento en términos de a y a^\dagger :

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger). \quad (9.3)$$

El conmutador entre a y a^\dagger puede calcularse utilizando las relaciones de conmutación canónicas para \tilde{x} y \tilde{p} y vale

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}. \quad (9.4)$$

Asimismo, utilizando esta relación, el Hamiltoniano se reescribe en función de estos nuevos operadores como

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \quad (9.5)$$

9.1.2. Autovalores y autovectores del Hamiltoniano

En lo que sigue veremos como encontrar autovalores y autovectores de H , es decir, resolver es siguiente sistema:

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$$

En particular, mostraremos que $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, con $n \geq 0$ y presentaremos un método para construir los autoestados $|\phi_n\rangle$.

Como vimos, el Hamiltoniano puede escribirse en términos de los operadores de creación y destrucción como $H = \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)$. Para lo que sigue, introduciremos un nuevo operador, que llamaremos, sugestivamente, operador de número $N = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$. Escribimos entonces el Hamiltoniano como

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (9.6)$$

Vemos entonces que, el problema de encontrar los autovalores y autovectores de H se reduce a encontrar los de N . En lo que sigue mostraremos que los autovalores del operador N son números enteros $n \geq 0$. Obtendremos el espectro de N deduciendo constructivamente sus propiedades. Es decir, queremos encontrar los auto estados $|\phi_\nu\rangle$ con autovalores ν que cumplen

$$N|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle. \quad (9.7)$$

Propiedad 1 *Todos los autovalores de N son reales y no negativos, es decir N es un operador positivo.*

Esto se deduce del hecho de que para todo estado $|\phi\rangle$ vale $\langle\phi|N|\phi\rangle \geq 0$, que implica que los elementos diagonales de la matriz de N en cualquier base son siempre no negativos. Esto surge de la siguiente observación: $\langle\phi|N|\phi\rangle = \langle\phi|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}|\phi\rangle = \|\mathbf{a}|\phi\rangle\|^2 \geq 0$. O sea, el valor medio $\langle\phi|N|\phi\rangle$ puede expresarse siempre como la norma al cuadrado del estado $\mathbf{a}|\phi\rangle$ y por lo tanto es ≥ 0 . Como eso vale para cualquier estado, evidentemente vale también para autoestados $|\phi_\nu\rangle$ de N . Por lo tanto, concluimos que el espectro de N está acotado por debajo y la cota inferior es cero.

Propiedad 2 *Dado un autoestado $|\phi_\nu\rangle$ de N con autovalor ν , entonces los estados $\mathbf{a}|\phi_\nu\rangle$ y $\mathbf{a}^\dagger|\phi_\nu\rangle$ son también autoestados del operador N con autovalores $\nu - 1$ y $\nu + 1$ respectivamente.*

Mostrar esto resulta conveniente utilizar las siguientes relaciones de conmutación, cuya validez se deduce constructivamente:

$$[N, \mathbf{a}] = -\mathbf{a} \quad \text{y} \quad [N, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger \quad (9.8)$$

Que pueden reescribirse como $N\mathbf{a} = \mathbf{a}(N - \mathbb{1})$ y $N\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger(N + \mathbb{1})$.

La demostración es la siguiente: El estado $|\phi_\nu\rangle$ satisface que $N|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle$. Si calculamos la acción de N sobre los estados $|\phi'_\nu\rangle = \mathbf{a}|\phi_\nu\rangle$ y $|\phi''_\nu\rangle = \mathbf{a}^\dagger|\phi_\nu\rangle$ observamos que valen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} N|\phi'_\nu\rangle &= N\mathbf{a}|\phi_\nu\rangle = \mathbf{a}(N - \mathbb{1})|\phi_\nu\rangle = (\nu - 1)|\phi'_\nu\rangle; \\ N|\phi''_\nu\rangle &= N\mathbf{a}^\dagger|\phi_\nu\rangle = \mathbf{a}^\dagger(N + \mathbb{1})|\phi_\nu\rangle = (\nu + 1)|\phi''_\nu\rangle \end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican precisamente que $|\phi'_\nu\rangle$ y $|\phi''_\nu\rangle$ son, respectivamente, autoestados de N con autovalores $\nu - 1$ y $\nu + 1$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad escribimos entonces $|\phi'_\nu\rangle = C'_\nu|\phi_{\nu-1}\rangle$ y $|\phi''_\nu\rangle = C''_\nu|\phi_{\nu+1}\rangle$, donde C'_ν y C''_ν

son constantes que determinaremos más adelante. Esto nos muestra que los operadores \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger nos permiten recorrer el espectro de N en dirección descendente y ascendente respectivamente. Es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}|\phi_\nu\rangle &= C'_\nu|\phi_{\nu-1}\rangle \\ \mathbf{a}^\dagger|\phi_\nu\rangle &= C''_\nu|\phi_{\nu+1}\rangle, \end{aligned} \quad (9.9)$$

Por estas relaciones es que se los define con nombres “bíblicos” los operadores. Llamamos *operador de creación* \mathbf{a}^\dagger y *operador de destrucción* \mathbf{a} . También se los denomina, menos épicamente, operadores de *subida* y *bajada*.

Propiedad 3 *El estado de autovalor nulo $|\phi_0\rangle$ cumple que $\mathbf{a}|\phi_0\rangle = 0$.*

Por cierto, tomando en cuenta que por definición $N|\phi_0\rangle = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|\phi_0\rangle = 0|\phi_0\rangle$, calculamos la norma de el estado $\mathbf{a}|\phi_0\rangle$ y es $\|\mathbf{a}|\phi_0\rangle\|^2 = \langle\phi_0|\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|\phi_0\rangle = 0$. Por lo tanto el estado $\mathbf{a}|\phi_0\rangle$ es nulo. Vemos entonces que, al aplicar el operador \mathbf{a} a $|\phi_0\rangle$ no seguimos descendiendo en la escalera de autovalores sino que cero es autovalor más bajo posible.

Propiedad 4 *Los autovalores de N son números enteros mayores o iguales que cero.*

La propiedad 2 implica que la aplicación de \mathbf{a} sucesivamente a un autoestado genera una escalera de autoestados con autovalor descendiente. La distancia entre los autovalores de los sucesivos estados es igual a la unidad. Utilizándola, demostraremos que ν debe ser un entero por el absurdo. Veamos, si fuera posible encontrar un valor de ν que fuera no entero entonces podríamos aplicar el operador \mathbf{a} un número de veces igual a la parte entera de ν y obtendríamos un autoestado cuyo autovalor es un número real entre 0 y 1. Aplicando \mathbf{a} una vez mas, generaríamos un estado con autovalor negativo, lo cual es absurdo (ya que mas arriba demostramos que $\nu \geq 0$). El absurdo proviene de suponer que ν es no entero. Por lo tanto, los únicos valores posibles de ν son enteros.

Para recordarnos que los autovalores son enteros, de ahora en adelante no usaremos la letra ν para indicar su valor, sino la letra n , que normalmente asociamos a números enteros.

Propiedad 5 *Los autoestados normalizados con autovalor $n \neq 0$ se obtienen a partir de $|\phi_0\rangle$ como $|\phi_n\rangle = (\mathbf{a}^\dagger)^n|\phi_0\rangle/\sqrt{n!}$.*

Elegimos los estados $|\phi_n\rangle$ normalizado a 1 por conveniencia. Como vimos (Ecuación 9.10), $\mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle = C''_n|\phi_{n+1}\rangle$, donde C''_n es una constante de normalización. Esta constante puede encontrarse calculando la norma de la expresión anterior. Esto es:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle\|^2 &= |C''_n|^2 \\ &= \langle\phi_n|\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \langle\phi_n|(N+1)|\phi_n\rangle \\ &= (n+1) \end{aligned}$$

Entonces, $C_n'' = \sqrt{n+1}$ y por lo tanto $\mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$. En este sentido, es conveniente reescribir las ecuaciones 9.9 explícitamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}|\phi_n\rangle &= \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle, \\ \mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle &= \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle.\end{aligned}\quad (9.10)$$

Iterando esta última igualdad hasta llegar a $n = 0$ obtenemos la relación general

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\mathbf{a}^{\dagger n}|\phi_0\rangle.\quad (9.11)$$

En consecuencia, la tarea de encontrar los estados $|\phi_n\rangle$ se reduce a la de encontrar el estado fundamental $|\phi_0\rangle$ ya que a partir de él podemos construir toda la escalera ascendente de autoestados aplicando sucesivas veces \mathbf{a}^\dagger .

Propiedad 6 *La función de onda del estado fundamental es una función Gaussiana centrada en el origen (con ancho σ_x).*

Para demostrar esto debemos resolver la única ecuación diferencial que veremos en este capítulo, que es la que se obtiene a partir de la ecuación $\mathbf{a}|\phi_0\rangle = 0$. Escribiendo esta ecuación en representación posición, recordando que $\mathbf{a} = (\mathbf{x}/\sigma_x + i\mathbf{p}\sigma_x/\hbar)/\sqrt{2}$ y que el operador posición en la representación de coordenadas se escribe $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\partial_x$, obtenemos

$$\langle x|\mathbf{a}|\phi_0\rangle = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}x + \partial_x\right)\phi_0(x) = 0.\quad (9.12)$$

Esta ecuación puede resolverse trivialmente y de ese modo obtenemos la solución general $\phi_0(x) = A_0 \exp(-x^2/2\sigma_x^2)$. La constante A_0 la fijamos por la condición de normalización $\int dx|\phi_0|^2(x) = 1$. El resultado final es entonces:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x\sqrt{\pi}}}\exp(-x^2/2\sigma_x^2).\quad (9.13)$$

Es decir, una Gaussiana de ancho σ_x centrada en el origen.

Propiedad 7 *La función de onda del cualquier estado excitado $\phi_n(x)$ es el producto un polinomio de grado n por la función de onda del estado fundamental.*

Esto surge a partir de la observación de que $|\phi_n\rangle = \mathbf{a}^{\dagger n}|\phi_0\rangle/\sqrt{n!}$. Escribiendo esta ecuación en representación posición $\phi_n(x) = \langle x|\phi_n\rangle$ obtenemos

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x\sqrt{\pi}}}\frac{1}{\sqrt{n!}2^n}\left(\frac{x}{\sigma_x} - \sigma_x\partial_x\right)^n \exp(-x^2/2\sigma_x^2)$$

El polinomio que buscamos es entonces un polinomio $H_n(u)$ que cumple

$$(u - \partial_u)^n \exp(-u^2/2) = H_n(u) \exp(-u^2/2).\quad (9.14)$$

Estos son los famosos polinomios de Hermite. Con ellos, la función de onda del estado $|\phi_n\rangle$ se escribe

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x \sqrt{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x/\sigma_x) \exp(-x^2/2\sigma_x^2).$$

Veamos algunos ejemplos de los polinomios $H_n(x)$ y de las funciones de onda correspondientes. Utilizando la ecuación 9.14, es inmediato encontrar la forma funcional explícita de los polinomios. Por ejemplo, los primeros tres son: $H_0(u) = 1$, $H_1(u) = 2u$, $H_2(u) = 4u^2 - 2$, $H_3(u) = 8u^3 - 12u$, etc. En la figura 9.1 se grafican funciones de onda para algunos n bajos. Notamos que en todos los casos los polinomios $H_n(u)$ tienen grado n y, por lo tanto tienen n raíces distintas. Es interesante observar que el punto $u = 0$ es raíz de todos los polinomios con n impar.

Finalmente notamos que los polinomios de Hermite $H_n(u)$ son ortogonales en la métrica definida como

$$\int H_n(u)H_m(u) \exp(-u^2) = \sqrt{2\pi} \delta_{n,m} du.$$

Esta es, una propiedad esperable, ya que $\phi_n(x)$ son auto-vectores de un operador Hermítico, y por lo tanto son ortogonales $\int \phi_m^* \phi_n = \delta_{n,m} dx$.

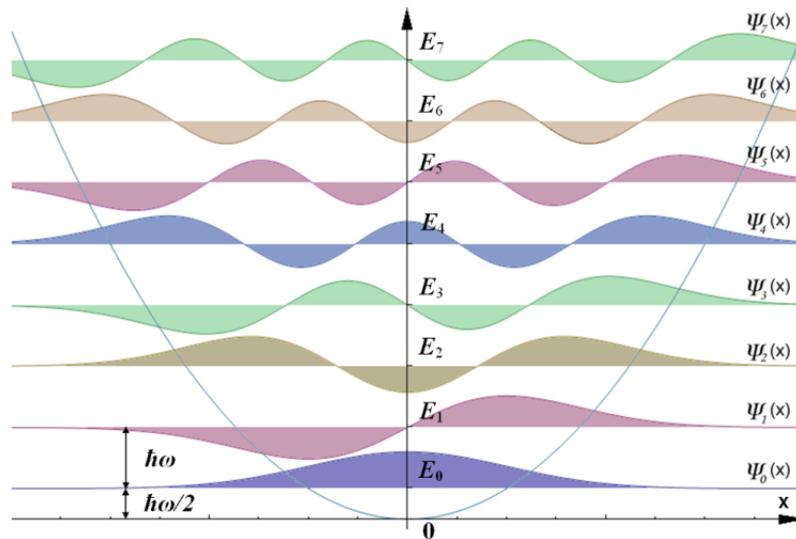


Figura 9.1: Primeras 7 funciones de onda $\langle x|\phi_n\rangle = \psi_n(x)$. Cada una está desplazada en el eje vertical por una cantidad proporcional a su autovalor. Imagen de Wikimedia Commons.

Propiedad 8 El valor medio tanto de la posición como del momento es nulo para auto-estados del hamiltoniano: $\langle x \rangle_n \equiv \langle \phi_n | x | \phi_n \rangle = 0$ y $\langle p \rangle_n \equiv \langle \phi_n | p | \phi_n \rangle = 0$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{x} = \sigma_x(\mathbf{a} + i\mathbf{a}^\dagger)/\sqrt{2}$, y $\mathbf{p} = -i\hbar(\mathbf{a} - i\mathbf{a}^\dagger)/\sqrt{2}\sigma_x$, podemos calcular los elementos de matriz de estos operadores recordando que $\mathbf{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$ y $\mathbf{a}|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$. Así obtenemos las relaciones generales,

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\mathbf{x}|\phi_m\rangle &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1} + \sqrt{m}\delta_{n,m-1}\right) \\ \langle\phi_n|\mathbf{p}|\phi_m\rangle &= \frac{i\hbar}{\sqrt{2}\sigma_x}\left(\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1} + \sqrt{m}\delta_{n,m-1}\right)\end{aligned}\quad (9.15)$$

De dónde, eligiendo $n = m$, es inmediato ver que tanto el valor medio de la posición como del momento se anula.

Propiedad 9 *El único autoestado del Hamiltoniano con indeterminación mínima es el fundamental $|\phi_0\rangle$. En general para autoestados $|\phi_n\rangle$ del Hamiltoniano se cumple que $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p} = \hbar(n + 1/2)$.*

Recordemos que la dispersión de un operador cumple $\Delta^2\mathbf{O} = \langle\mathbf{O}^2\rangle - \langle\mathbf{O}\rangle^2$. Los valores medios $\langle\mathbf{x}\rangle_n$ y $\langle\mathbf{p}\rangle_n$ ya fueron calculados en el punto anterior y son nulos. Queda entonces calcular los valores medios de los operadores $\langle\mathbf{x}^2\rangle_n$ y $\langle\mathbf{p}^2\rangle_n$. Escribimos primero la expresiones de los operadores \mathbf{x}^2 y \mathbf{p}^2 en función de los operadores de creación y destrucción \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^2 &= \frac{\sigma_x^2}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) \\ \mathbf{p}^2 &= \frac{\hbar^2}{2\sigma_x^2}(-\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Podemos ahora proceder igual que en caso anterior y obtenemos

$$\langle\mathbf{x}^2\rangle_n = \sigma_x^2\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \langle\mathbf{p}^2\rangle_n = \frac{\hbar^2}{\sigma_x^2}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

De dónde es inmediato obtener la relación de dispersión enunciada.

9.2. Evolución temporal

La evolución temporal en la representación de Schroedinger es bastante sencilla. Dado el estado inicial $|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$, el estado a tiempos posteriores es

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t\right]|\phi_n\rangle$$

Las frecuencias de Bohr, que aparecen en la evolución de cualquier valor medio son lineales en la diferencia de autovalores $\omega_{nm} = (n - m)\omega$. De donde podemos ver, por ejemplo, que pasa si preparamos un estado inicial en una superposición de dos autoestados de la energía consecutivos, n y $n + 1$. En este caso el valor medio de la

posición y del momento oscilarán a la frecuencia fundamental de oscilador. Esto es análogo al caso clásico. Sin embargo, si preparamos una superposición de dos estados separados en n , estos valores medios oscilarán a una frecuencia $n\omega$. Esta propiedad, en cambio, es propia del oscilador cuántico y no tiene correlato clásico. Asimismo, si preparamos una superposición más compleja, los valores medios se batirán a todas las frecuencias de Bohr presentes, como fue descrito en la Sección 7.2.1.

La representación de Heisenberg es también sencilla. Como vimos en la sección 7.3.2, las ecuaciones de evolución de los operadores posición y momento son idénticas a las clásicas y, por lo tanto, pueden ser resueltas exactamente. Lo mismo ocurre para la ecuación de evolución del operador $\mathbf{a}_H(t)$ que resulta

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\mathbf{a}}_H &= [\mathbf{a}_H, \hbar\omega(N_H + 1/2)] \\ &= \hbar\omega\mathbf{a}_H, \end{aligned} \quad (9.16)$$

que se resuelve trivialmente

$$\mathbf{a}_H(t) = \mathbf{a}_H(0)\exp(-i\omega t) = \mathbf{a}\exp(-i\omega t), \quad (9.17)$$

donde \mathbf{a} es el operador en la representación de Schrödinger. Como veremos en lo que sigue, esta representación será particularmente útil para calcular la evolución temporal de un tipo de estados especial: los *estados coherentes*.

9.3. Estados coherentes

En esta sección estudiaremos un tipo de estados especial que cumple con muchas de las propiedades que esperaríamos de un oscilador armónico clásico: el valor medio de la posición y del momento no se anulan simultáneamente, sino que oscilan a la frecuencia natural de oscilador ω y existe un continuo de estados caracterizados por parámetro α que caracteriza la energía del estado. Veremos la función de onda que representa a estos estados $\phi_\alpha = \langle x|\alpha\rangle$ será una Gaussiana que oscila entorno del origen a frecuencia ω . Los estados coherentes, como veremos, son estados que caracterizan a la luz generada por un láser y son, en un sentido bien definido, los estados cuánticos más parecidos a los estados clásicos.

Para encontrar estos estados conviene notar que en la representación de Heisenberg el operador de aniquilación oscila a frecuencia ω , como se mostró en la ecuación 9.17. Resulta entonces natural considerar qué forma tienen los autoestados del operador de aniquilación \mathbf{a} a quienes llamaremos estados “estados coherentes” $|\alpha\rangle$ y cumplen

$$\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (9.18)$$

Es importante recordar que \mathbf{a} no es hermítico, por lo que sus autovalores serán, en general, números complejos.

9.3.1. Evolución temporal

Es interesante notar que la evolución temporal preserva los estados coherentes. Es decir, un estado coherente evoluciona en otro estado coherente. Esto es también se deduce de de la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción es $\mathbf{a}(t)_H = \mathbf{a} \exp(-i\omega t)$. Veamos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}|\alpha(t)\rangle &= \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger \mathbf{a}\mathbf{U}|\alpha(0)\rangle \\
 &= \mathbf{U}\mathbf{a}_H(t)|\alpha(0)\rangle \\
 &= \mathbf{U}\mathbf{a} \exp(-i\omega t)|\alpha(0)\rangle \\
 &= \mathbf{U} \exp(-i\omega t)\alpha_0|\alpha(0)\rangle \\
 \alpha(t)|\alpha(t)\rangle &= \exp(-i\omega t)\alpha_0|\alpha(t)\rangle
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

En consecuencia, un autoestado del operador \mathbf{a} con autovalor α_0 es un autoestado del operador $\mathbf{a}(t)$ para todo tiempo con autovalor

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-i\omega t). \tag{9.20}$$

De dónde vemos que la fase de α indica el instante de la oscilación y su módulo estará relacionada con la energía o amplitud de oscilación.

9.3.2. Valores medios de posición y momento

En un estado coherente los valores medios de los operadores posición y momento evolucionan siguiendo las ecuaciones clásicas de movimiento. Para demostrar esto es conveniente considerar las relaciones generales de los valores medios $\langle \mathbf{x} \rangle$ y $\langle \mathbf{p} \rangle$ sus casos especiales para un estado coherente $\langle \mathbf{x} \rangle_\alpha$ y $\langle \mathbf{p} \rangle_\alpha$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x} \rangle &= \sqrt{2}\sigma_x \operatorname{Re}\langle \mathbf{a} \rangle; \quad \langle \mathbf{x} \rangle_\alpha = \sqrt{2}\sigma_x \operatorname{Re}(\alpha) \\
 \langle \mathbf{p} \rangle &= \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sigma_x} \operatorname{Im}\langle \mathbf{a} \rangle; \quad \langle \mathbf{p} \rangle_\alpha = \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sigma_x} \operatorname{Im}(\alpha).
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Así para un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$, utilizando la ecuación 9.20 es inmediato ver que estos valores medios oscilan a contra-fase con frecuencia ω , cómo se buscaba.

9.3.3. Representación como autoestados de la energía

Veremos ahora que los estados coherentes pueden ser construidos en forma explícita de manera sencilla. Para eso los escribiremos como una combinación lineal de los autoestados del Hamiltoniano. En efecto, planteando que $|\alpha\rangle = \sum_n b_n |\phi_n\rangle$,

la ecuación de autovalores para el operador de destrucción puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\
 \mathbf{a} \sum_n b_n |\phi_n\rangle &= \alpha \sum_n b_n |\phi_n\rangle \\
 \sum_n b_n \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle &= \sum_n \alpha b_n |\phi_n\rangle \\
 \sum_n b_{n+1} \sqrt{n+1} |\phi_n\rangle &= \sum_n \alpha b_n |\phi_n\rangle
 \end{aligned}$$

De esta última ecuación se deducimos relación de recurrencia para los coeficientes $b_{n+1} = \alpha b_n / \sqrt{n+1}$. Comenzando con b_0 e iterando esta relación obtenemos $b_n = \alpha^n b_0 / \sqrt{n!}$. La constante b_0 la fijamos exigiendo que el estado esté normalizado, es decir, que cumpla que $1 = |b_0|^2 \sum_n |\alpha|^{2n} / n!$ y por lo tanto $b_0 = \exp(-|\alpha|^2/2)$. Juntando todo, estado coherente $|\alpha\rangle$ resulta ser

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle. \quad (9.22)$$

Esta es la forma explícita del estado coherente en la base de auto estados de energía.

9.3.4. Operador desplazamiento

La forma anterior de los estados coherentes puede reescribirse de manera más compacta notando que $\mathbf{a}^{+n} |\phi_0\rangle = \sqrt{n!} |\phi_n\rangle$, sumando la exponencial, recordando que $\mathbf{a} |\phi_0\rangle = 0$ y usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Veamos,

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \mathbf{a}^{+n} |\phi_0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha \mathbf{a}^+) |\phi_0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha \mathbf{a}^+) \exp(-\alpha^* \mathbf{a}) |\phi_0\rangle \\
 &= \exp(\alpha \mathbf{a}^+ - \alpha^* \mathbf{a}) |\phi_0\rangle \\
 &= \mathbf{D}(\alpha) |\phi_0\rangle
 \end{aligned}$$

En la última ecuación hemos introducido el operador de desplazamiento en el espacio de las fases $\mathbf{D}(\alpha) = \exp(\alpha \mathbf{a}^+ - \alpha^* \mathbf{a})$. Si reescribimos este operador en función de los operadores \mathbf{x} y \mathbf{p} podemos entender el porqué de su nombre $\mathbf{D}(\alpha) = \exp((-ix_\alpha \mathbf{p} + ip_\alpha \mathbf{x})/\hbar)$, donde $\alpha = (x_\alpha/\sigma_x + i\sigma_x p_\alpha/\hbar)/\sqrt{2}$. Es decir, en el lenguaje de las transformaciones introducidas en el capítulo 6, el operador genera el desplazamiento en el espacio de fases $\mathbf{D}(x_\alpha, p_\alpha)$. Resultará importante notar que el operador desplazamiento $\mathbf{D}(\alpha)$ satisface las siguientes dos relaciones que utilizaremos más adelante

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha + \beta) \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta), \quad (9.23)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta)) = 2\pi\delta(\alpha - \beta) \quad (9.24)$$

Como vemos, un estado coherente no es otra cosa que una traslación en el espacio de las fases aplicada al estado fundamental del oscilador armónico. Por consiguiente, la función de onda de dicho estado es una Gaussiana centrada en un punto que sigue la trayectoria clásica que se origina a partir del punto cuya coordenada y momento está dada por α_0 .

9.3.5. Función de onda

Para construir la función de onda de un estado coherente $\langle x|\alpha\rangle$ utilizamos que el estado coherente $|\alpha\rangle$, puede escribirse como el estado fundamental, desplazado en $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$. Para hacerlo desplazamos la solución $\langle x|0\rangle$ que dedujimos en la ecuación 9.13 y obtenemos

$$\begin{aligned}\langle x|\alpha\rangle &= \phi_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_x}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(i\frac{x p_\alpha}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{x_\alpha p_\alpha}{2\hbar}\right).\end{aligned}\quad (9.25)$$

9.3.6. Incerteza mínima

Los estados coherentes son estados de incerteza mínima. En efecto, es fácil calcular la incerteza en la posición. Para eso podemos demostrar la validez de las siguientes identidades, que surgen de expresar el operador posición en términos de \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger y de la definición de los estados coherentes como autoestados del operador de destrucción:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}^2 \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \mathbf{x}^2 | \alpha \rangle = \frac{\sigma_x^2}{2} (\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1), \\ \langle \mathbf{x} \rangle_\alpha^2 &= \langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle^2 = \frac{\sigma_x^2}{2} (\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2) \\ \langle \mathbf{p}^2 \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \mathbf{p}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar^2}{2\sigma_x^2} (-\alpha^2 - \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1), \\ \langle \mathbf{p} \rangle_\alpha^2 &= \langle \alpha | \mathbf{p} | \alpha \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\sigma_x^2} (-\alpha^2 - \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las dispersiones son

$$\begin{aligned}\Delta^2 \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}^2 \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \frac{\sigma_x^2}{2}, \\ \Delta^2 \mathbf{p} &= \langle \mathbf{p}^2 \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\sigma_x^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface la identidad

$$\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{p} = \frac{\hbar}{2}$$

Es interesante notar, que esta ecuación es independiente de α . Esto es radicalmente distinto a lo que ocurre con los autoestados del hamiltoniano, cuya dispersión depende de la energía.

9.3.7. Relación de completitud y ortogonalidad

Los estados coherentes tienen numerosas propiedades útiles. Una de ellas es que forman una base sobre-completa del espacio de estados. En efecto, se puede demostrar que el operador identidad puede obtenerse como

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (9.26)$$

Esta identidad puede probarse de la siguiente forma: Podemos introducir la identidad en representación de posición y escribir

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int \frac{d\alpha}{\pi} \int dx dy |x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle\alpha|y\rangle\langle y| \\ &= \int \frac{dx_\alpha dp_\alpha}{2\pi\hbar} \int dx dy |x\rangle\langle y| \phi_\alpha(x) \phi_\alpha^*(y) \\ &= \int dx |x\rangle\langle x| \frac{1}{\sigma_x \sqrt{\pi}} \int dx_\alpha \exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2}{\sigma_x^2}\right) \\ &= \int dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Dónde para pasar de la segunda a la tercera línea se utilizó la representación explícita del estado coherente en posición dada por la ecuación 9.25.

Por otro lado, estos estados no son ortogonales sino que satisfacen la relación:

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \sum_n \frac{1}{n!} (\alpha\beta^*)^n \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha\beta^*\right). \end{aligned} \quad (9.27)$$

9.3.8. Energía

Por último, una de las propiedades más importantes de los estados coherentes es la distribución de resultados de una medición de la energía. En efecto, si preparamos el estado coherente $|\alpha\rangle$ (ver más abajo) y medimos la energía del sistema (o, análogamente el operador N) obtenemos que los mismos están distribuidos con la siguiente probabilidad:

$$\text{Prob}(n|\alpha) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$

Esta es una distribución Poissoniana con un valor medio $\bar{n} = \langle N \rangle = |\alpha|^2$. Por lo tanto, la distribución puede reescribirse como

$$\text{Prob}(n|\alpha) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}.$$

9.4. El oscilador forzado

Veremos ahora como se puede preparar un estado coherente a partir del estado fundamental del oscilador armónico. Para eso consideraremos un oscilador al que se lo acopla con una fuente dependiente del tiempo, descrita por un potencial de interacción de la forma $V_{fuente} = -\mathbf{x}F(t) = -\sigma_x \tilde{\mathbf{x}}F(t)$. Clásicamente esto implica aplicar una fuerza $\vec{F} = F(t)\vec{e}_x$ cuyo módulo depende del tiempo). Para el caso cuántico, el hamiltoniano es

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}^2 + \tilde{\mathbf{x}}^2) - \sigma_x \tilde{\mathbf{x}}F(t). \quad (9.28)$$

Con este Hamiltoniano, la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción es

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\mathbf{a}} &= [\mathbf{a}, \mathbf{H}] \\ i\hbar\dot{\mathbf{a}} &= \hbar\omega\mathbf{a} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}F(t); \\ \dot{\mathbf{a}} &= -i\omega\mathbf{a} + iG(t), \end{aligned} \quad (9.29)$$

donde $G(t) = F(t)\sigma_x/\sqrt{2}\hbar$. La solución general de la ecuación para $\mathbf{a}(t)$ es simple:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(0) e^{-i\omega t} + i \int_0^t e^{-i\omega(t-t')} G(t') dt'$$

El segundo término es proporcional al operador identidad. Por lo tanto podemos concluir que si el estado inicial es $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ (que es un autoestado del operador $\mathbf{a}(0)$ con autovalor nulo) entonces este estado será siempre autoestado de $\mathbf{a}(t)$ con autovalor $\alpha(t)$ dado por:

$$\alpha(t) = i \int_0^t e^{-i\omega(t-t')} G(t') dt'. \quad (9.30)$$

En el instante t , el estado en la representación de Schroedinger será un autoestado del operador de destrucción $\mathbf{a} = \mathbf{a}(0)$ con autovalor $\alpha(t)$, es decir $|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle$.

De lo anterior deducimos que un protocolo sencillo para preparar un estado coherente cualquiera es: a) preparar el oscilador en el estado fundamental, b) prender una fuente (que corresponde a una fuerza independiente de la posición pero dependiente del tiempo) por un tiempo apropiadamente elegido, c) apagar la fuente y de ese modo obtenemos el estado deseado.

Es interesante ver cómo son las funciones $\alpha(t)$ para algunas fuerzas particulares.

Fuente Escalón Una fuente que se enciende en un momento y queda encendida para siempre. Es decir, $G(t < 0) = 0$ y $G(t \geq 0) = G_0 = cte$. En este caso resulta que

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\frac{G_0}{\omega}(1 - \exp(-i\omega t)) \\ &= -i\frac{2G_0}{\omega} \exp(-i\omega t/2) \sin(\omega t/2) \end{aligned}$$

De dónde podemos calcular el valor medio de la posición utilizando la relación 9.21

$$\langle \mathbf{x}_\alpha(t) \rangle = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos(\omega t)). \quad (9.31)$$

Con lo cual vemos que el sistema oscila alrededor de la posición de equilibrio $\mathbf{x}_{eq} = F_0/m\omega^2 = F_0/k$ siendo k la constante elástica del resorte. Este es un resultado totalmente natural. El sistema absorbe energía en el momento en que prendemos la fuente y luego conserva la energía.

Fuente Oscilante Una fuente cuya intensidad oscila a frecuencia ω_f con una amplitud G_0 , es decir $G(t) = G_0 \sin(\omega_f t)$. En este caso, con un forzado periódico se observan resultados más interesantes. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= iG_0 \int_0^t e^{-i\omega(t-t')} \sin(\omega_f t') dt \\ \alpha(t) &= \frac{G_0}{2} e^{-i\omega t} \int_0^t \left(e^{i(\omega+\omega_f)t'} - e^{i(\omega-\omega_f)t'} \right) dt \\ &= -i \frac{G_0}{2} e^{-i\omega t} \left(\frac{e^{i(\omega+\omega_f)t} - 1}{\omega + \omega_f} - \frac{e^{i(\omega-\omega_f)t} - 1}{\omega - \omega_f} \right) \\ &= -i \frac{G_0}{2} \left(\frac{e^{i\omega_f t} - e^{-i\omega t}}{\omega + \omega_f} - \frac{e^{-i\omega_f t} - e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_f} \right) \end{aligned}$$

El valor medio de la posición es, nuevamente utilizando las relaciones 9.21,

$$\langle \mathbf{x}_\alpha(t) \rangle = \sigma_x \frac{G_0}{\sqrt{2}} \left(\cos \omega t \left(\frac{\sin(\omega + \omega_f)t}{\omega + \omega_f} - \frac{\sin(\omega - \omega_f)t}{\omega - \omega_f} \right) + \sin \omega t \left(\frac{\cos(\omega + \omega_f)t - 1}{\omega + \omega_f} - \frac{\cos(\omega - \omega_f)t - 1}{\omega - \omega_f} \right) \right) \quad (9.32)$$

En el caso resonante tenemos que $\omega_f = \omega$ y entonces

$$\langle \mathbf{x}_\alpha(t) \rangle = \sigma_x \frac{G_0}{\sqrt{2}} \left(\cos \omega t \left(\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - t \right) - \frac{\sin^3 \omega t}{\omega} \right)$$

En consecuencia, para tiempos largos ($t \gg 1/\omega$) tenemos que el valor medio de la posición se comporta como

$$\langle \mathbf{x}_\alpha(t) \rangle \rightarrow -t \sigma_x \frac{G_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t = -t \frac{F_0}{2m\omega} \cos \omega t$$

Como vemos, en este caso la amplitud de la oscilación crece linealmente con el tiempo. El comportamiento de $\langle \mathbf{x}_\alpha(t) \rangle$ en todos estos casos es idéntico al de un oscilador clásico con un forzado periódico y este último caso corresponde a la resonancia, en el que para tiempos largos la amplitud diverge. Siempre que estemos, como hemos supuesto, en ausencia de rozamiento.

9.5. Representación en el espacio de fases

La función de Wigner $W(\alpha) = W(x, p)$ es una función definida en el espacio de las fases que permite representar el estado cuántico de una partícula. La relación entre la función de Wigner y el estado de un sistema es biyectiva. Su definición no se restringe al caso de un oscilador armónico sino que puede aplicarse a todo tipo de sistemas. Su inclusión en este capítulo es, por cierto, arbitraria pero justificada en el hecho de que dicha función es particularmente útil para el caso del oscilador armónico. La función de Wigner permite, al representar al estado cuántico en el mismo escenario de la física clásica, poner en evidencia los efectos cuánticos más interesantes.

La función $W(\alpha)$ para el estado descrito por la matriz densidad ρ se define como

$$W(\alpha) = \text{Tr}(A(\alpha)\rho), \quad (9.33)$$

donde el operador $A(\alpha)$, habitualmente denominado “operador de punto”, se define como

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} D(\alpha) R D^\dagger(\alpha). \quad (9.34)$$

Dónde $D(\alpha) \equiv D(x, p)$ son los operadores de traslación generalizados en espacio de fases (ver sección 9.3.4) y R es es operador de reflexión que cumple $R|x\rangle = |-x\rangle$.

El conjunto de operadores $A(\alpha)$ tiene propiedades sencillas y útiles. En particular, es importante notar que, estos operadores son hermíticos, son una base completa del espacio de operadores y cumplen que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A(\alpha)A(\beta)) &= \frac{1}{2\pi} \delta(\alpha - \beta). \\ \int d^2\alpha A(\alpha) &\equiv \int dx dp A(x, p) = \mathbb{1} \end{aligned} \quad (9.35)$$

En consecuencia, cualquier operador puede escribirse como combinación lineal de estos operadores. En el caso del estado particular de la matriz densidad ρ podemos probar que la siguiente ecuación es válida:

$$\rho = 2\pi \int d^2\alpha W(\alpha) A(\alpha). \quad (9.36)$$

Esto quiere decir que, $W(\alpha)$ no es otra cosa que el coeficiente del desarrollo del estado ρ en la base formada por los operadores $A(\alpha)$.

Las propiedades fundamentales de la función de Wigner surgen de propiedades de los operadores $A(\alpha)$. Las propiedades más importantes son:

1. $W(\alpha)$ es siempre real. Esto se debe a que por su definición, $W(\alpha)$ es el valor medio de un operador hermítico $A(\alpha)$ y los autovalores de los operadores hermíticos son reales.
2. La función de Wigner está normalizada a la unidad, es decir que $\int d^2\alpha W(\alpha) = 1$. Esto surge de tomar la traza de la expresión 9.36 y de utilizar el hecho de

que $\text{Tr}(A(\alpha)) = 1/2\pi$, que se deduce considerando de que la traza del operador de reflexión es igual a $1/2$.

3. La función $W(\alpha)$ provee una descripción completa del estado. Esto se desprende de la ecuaciones 9.35 que implican que los operadores $A(\alpha)$ forman una base ortonormal y completa del espacio de operadores. En este sentido, podemos probar que se cumple que para todo par de estados ρ_1 y ρ_2 vale

$$\text{Tr}(\rho_1\rho_2) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\alpha W_1(\alpha)W_2(\alpha)$$

También vale que el valor medio de cualquier operador O puede calcularse a partir de la función de Wigner de la siguiente manera:

$$\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho O) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\alpha W_\rho(\alpha)W_O(\alpha)$$

dónde extendimos naturalmente la definición de la función de Wigner a $W_O = \text{Tr}(AO)$ y $W_\rho = \text{Tr}(A\rho)$.

4. La integral de $W(\alpha)$ sobre cualquier recta en el espacio de las fases, definida por la ecuación $ax + bp = c$ es igual a la densidad de probabilidad de que el resultado de la medición del observable $ax + bp$ esté en un entorno del punto c . O sea, la función de Wigner es “casi” una densidad de probabilidad en el espacio de las fases. Por esto decimos: la función de Wigner es una *cuasi* densidad de probabilidad. Esta propiedad surge del hecho de que la integral de $\hat{A}(\alpha)$ sobre la recta $ax + bp = c$ es igual al proyector sobre el autoestado de autovalor c del operador $ax + bp$.
5. Las definiciones anteriores de la función de Wigner pueden reescribirse de la siguiente manera, que aparece de manera más habitual en los libros de texto (pero que es menos práctica a la hora de deducir las propiedades de esta función):

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{-ipu/\hbar} \langle x - u/2 | \rho | x + u/2 \rangle$$

Sin embargo la función de Wigner no puede ser interpretada, en general, como una densidad de probabilidad ya que puede ser negativa. La negatividad de la función de Wigner es una evidencia de la imposibilidad de reducir las probabilidades de la mecánica cuántica a nuestra ignorancia. La negatividad de la función de Wigner pone de manifiesto los efectos de interferencia cuántica.

9.5.1. Gatos de Schrödinger en el espacio de fases

Un ejemplo paradigmático de estos efectos se observa al estudiar estados que son superposiciones de estados coherentes. Estos estados son llamados “gatos de

Schrödinger” ya que describen a una partícula en una superposición de dos posiciones y momentos bien definidos. La partícula no está “aquí ó allá” sino que esta en ambos lugares a la vez. Vamos a calcular la función de Wigner para un estado tipo gato de Schroedinger de la forma

$$|\Psi_{cat}\rangle = \frac{|\beta\rangle - |-\beta\rangle}{N},$$

donde N es una constante de normalización cuyo valor obtenemos utilizando la relación 9.27 y es $N = (2 - 2\exp(-2|\beta|^2))^{1/2}$. Para calcular la función de Wigner del estado “gato” hay que usar que la matriz densidad de ese estado es

$$\rho_{cat} = \frac{|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta| - |-\beta\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle-\beta|}{N^2}.$$

El resultado se obtiene fácilmente si utilizamos nuevamente la relación 9.27 para obtener las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \langle\beta|\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{R}\mathbf{D}^\dagger(\alpha)|\beta\rangle &= \langle\alpha - \beta|\beta - \alpha\rangle \\ &= e^{-2|\alpha - \beta|^2} \\ \langle-\beta|\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{R}\mathbf{D}^\dagger(\alpha)|\beta\rangle &= \langle\beta + \alpha|-\alpha + \beta\rangle e^{\alpha^*\beta - \alpha\beta^*} \\ &= e^{-2|\alpha|^2} e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} \end{aligned}$$

Usando estas expresiones, se obtiene que la función de Wigner del estado gato es

$$W_{cat}(\alpha) = \frac{1}{N^2} \left(e^{-2|\alpha - \beta|^2} + e^{-2|\alpha + \beta|^2} - 2 e^{-2|\alpha|^2} \cos(2\text{Im}(\alpha^*\beta)) \right)$$

La interpretación de este resultado es sencilla: la función de Wigner del estado gato exhibe dos picos Gaussianos, ubicados en $\alpha = \pm\beta$. Esta es la contribución de los términos diagonales $|\pm\beta\rangle\langle\pm\beta|$. Los términos no diagonales contribuyen con un término oscilante modulado por una Gaussiana centrada en el origen, que es el punto medio entre los dos picos Gaussianos diagonales. En el caso particular en que los gatos estén separados en posición, tenemos $\beta = L/\sigma_x$ y por lo tanto el factor oscilante se reduce a $\cos(2p_\alpha L/\hbar)$. Es decir, las oscilaciones están alineadas en forma paralela al eje x y tienen una longitud de onda $\lambda_p = \hbar/L\pi$, que es inversamente proporcional a L . Es notable que la función de Wigner evaluada en $\alpha = 0$ es evidentemente negativa.

