

## Sistemas compuestos

La mecánica cuántica de los sistemas compuestos da lugar a muchas sorpresas. En lo que sigue haremos un resumen de ellas. Es notable que todas estas propiedades no requieren ningún nuevo postulado sino que todas ellas se deducen de los postulados anteriores.

### 5.1. El espacio producto tensorial.

Consideremos un sistema formado por dos partes, a las que llamaremos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Cada una de ellas tiene su espacio de estados  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . ¿Cuál es el espacio de estados del conjunto  $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ ? La respuesta es sencilla. En primer lugar, podemos considerar a los sistemas como independientes y realizar observaciones por separado sobre cada uno de ellos. En ese caso, podemos hacer un examen exhaustivo de las propiedades de  $\mathcal{A}$  y de  $\mathcal{B}$ . El número máximo de resultados distintos que obtenemos cuando realizamos observaciones sobre  $\mathcal{A}$  es  $D_{\mathcal{A}} = \dim(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$  (y análogamente para  $\mathcal{B}$ ). En consecuencia, la dimensión del espacio de estados del conjunto  $\mathcal{A}-\mathcal{B}$  debe ser  $D_{\mathcal{A}} \times D_{\mathcal{B}}$ . En cada espacio vectorial podemos definir una base  $B_{\mathcal{A}}$  y  $B_{\mathcal{B}}$  cada una de las cuales está asociada a un CCOC sobre cada subsistema. Usaremos la notación  $B_{\mathcal{A}} = \{|\phi_j\rangle_{\mathcal{A}}, j = 1, \dots, D_{\mathcal{A}}\}$  y  $B_{\mathcal{B}} = \{|\xi_j\rangle_{\mathcal{B}}, j = 1, \dots, D_{\mathcal{B}}\}$ . Cuando los subsistemas son preparados en los estados  $|\phi_j\rangle_{\mathcal{A}}$  y  $|\xi_k\rangle_{\mathcal{B}}$  tienen valores bien definidos de las propiedades que corresponden al CCOC sobre cada subsistema (por ejemplo, si fueran dos partículas de spin 1/2 podríamos tomar la base  $B_{\mathcal{A}}$  como la de los autoestados de  $S_z$  y la base  $B_{\mathcal{B}}$  como lo se los autoestados de  $S_x$  para el segundo subsistema). Evidentemente, una observación exhaustiva sobre las partes implica una observación exhaustiva sobre el conjunto. Por eso, para cada par de vectores  $\{|\phi_i\rangle_{\mathcal{A}}, |\xi_k\rangle_{\mathcal{B}}\}$  debe existir un vector en una base ortonormal y completa del espacio

de estados del conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ . A este vector lo denotaremos  $|\phi_i\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\xi_k\rangle_{\mathcal{B}}$  o simplemente  $|\phi_i, \xi_k\rangle_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ , y  $\otimes$  simboliza al producto tensorial. En ese caso se dice que el espacio  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  es el producto tensorial de  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$  y se denota  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ .

Definiendo el producto interno como  $(|\phi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\xi\rangle_{\mathcal{B}}, |\psi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\chi\rangle_{\mathcal{B}}) = \langle \phi | \psi \rangle \langle \xi | \chi \rangle$ , es posible ver que, dadas dos bases ortonormales de  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$  respectivamente, es posible construir una base ortonormal en  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ . Los estados de esa base se denominan *estados producto*. La base producto  $B_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  obtenida de esta manera se denotará  $B_{\mathcal{A}} \otimes B_{\mathcal{B}}$  y estará formada por los vectores  $B_{\mathcal{A}} \otimes B_{\mathcal{B}} = \{|\phi_i\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\xi_k\rangle_{\mathcal{B}}; i = 1, \dots, D_{\mathcal{A}}, k = 1, \dots, D_{\mathcal{B}}\}$ . En algunas ocasiones, cuando no se induzca confusión, usaremos una notación menos recargada omitiendo el símbolo  $\otimes$ .

Como esta es una base del espacio del sistema completo, el estado más general del mismo será una combinación lineal de los elementos de esta base  $|\psi\rangle_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \sum_{i,k} \alpha_{i,k} |\phi_i\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\xi_k\rangle_{\mathcal{B}}$ . Es fácil ver que, entonces, el estado más general no es un estado producto. En efecto, el espacio  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  tiene estados producto y otros que no lo son. A estos últimos, los que no pueden representarse como producto tensorial de dos estados, se los denomina *estados entrelazados*:

$$|\psi\rangle_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \neq |\varphi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\chi\rangle_{\mathcal{B}}. \quad (5.1)$$

Es decir, los estados puros entrelazados son todos los estados que no son producto. Para estados mixtos, como veremos más adelante, la definición se generaliza diciendo que los estados entrelazados son tales que no pueden representarse como una combinación convexa (coeficientes positivos de la combinación lineal y que suman uno) de estados producto.

Como mencionamos previamente existen estados que no pueden ser escritos como un producto tensorial que llamamos entrelazados. Veamos ahora un ejemplo ilustrativo de estos estados. Consideremos dos partículas de spin 1/2 y tomemos las bases  $B_{\mathcal{A}}$  y  $B_{\mathcal{B}}$  como los autoestados de  $S_z$  para cada spin, a los que denotaremos  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Consideremos el siguiente estado del conjunto:  $|\psi\rangle_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) / \sqrt{2}$  (en todos los casos el primer término del producto tensorial corresponde a un estado del sistema  $\mathcal{A}$  y el segundo a uno de  $\mathcal{B}$ ). Para ver que este estado no es un producto, podemos escribir el estado producto más general como

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\chi\rangle_{\mathcal{B}} &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle) \\ &= \alpha\alpha'|0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\beta'|0\rangle \otimes |1\rangle + \beta\alpha'|1\rangle \otimes |0\rangle + \beta\beta'|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle). \end{aligned}$$

Para que esta última igualdad sea válida debe cumplirse que  $\alpha\beta' = 0$  y  $\alpha'\beta = 0$ . Esto claramente no es posible (ya que  $\alpha\beta' = 0$  implica que  $\alpha = 0$  o que  $\beta' = 0$  y en ambos casos el estado resultante no puede ser nunca el deseado). En conclusión, el estado considerado no es un producto.

## 5.2. Estados entrelazados. Descomposición de Schmidt.

Aquí veremos cómo es posible representar en forma compacta un estado puro entrelazado en una base producto. En principio, todo estado entrelazado puede escribirse como la combinación lineal de la base producto. En el caso general, siempre podemos escribir

$$|\phi\rangle_{A,B} = \sum_{j=1}^{D_A} \sum_{k=1}^{D_B} c_{jk} |\phi_j\rangle \otimes |\xi_k\rangle. \quad (5.2)$$

Entonces, pareciera que para escribir al estado más general siempre necesitamos  $D_A \times D_B$  términos. Sin embargo esto no es cierto ya que, como veremos, siempre es posible elegir una base en cada espacio de modo tal que sean suficientes a lo sumo  $\min(D_A, D_B)$  términos para representar cualquier estado. Para demostrarlo usaremos la SVD (descomposición en valores singulares que vimos en la Sec. 2.3.4) de la matriz  $C$ , definida por los coeficientes  $c_{jk}$ . Esta es una matriz de dimensión  $D_A \times D_B$  que siempre puede escribirse como  $C = U \times \Lambda \times V$  donde  $U$  y  $V$  son matrices unitarias cuya dimensión es  $D_A \times D_A$  y  $D_B \times D_B$  respectivamente. Por su parte,  $\Lambda$  es una matriz de  $D_A \times D_B$  que tiene un bloque diagonal con  $\min(D_A, D_B)$  elementos reales y mayores o iguales que cero (todos sus otros elementos son nulos). Teniendo en cuenta esto, podemos escribir  $c_{jk} = \sum_m U_{jm} \Lambda_m V_{mk}$ , donde  $\Lambda_m$  son los elementos de la diagonal de la matriz  $\Lambda$ . Reemplazando esto en la expresión anterior para el estado más general obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A,B} &= \sum_m \Lambda_m \left( \sum_j U_{jm} |\phi_j\rangle \right) \otimes \left( \sum_k V_{mk} |\xi_k\rangle \right) \\ &= \sum_m \Lambda_m |\tilde{\phi}_m\rangle \otimes |\tilde{\xi}_m\rangle. \end{aligned}$$

En esta última expresión los estados  $|\tilde{\phi}_m\rangle$ , que pertenecen a  $\mathcal{H}_A$ , son ortonormales (ya que son una combinación lineal unitaria de los elementos de una base ortonormal), y lo mismo sucede con los vectores  $|\tilde{\xi}_m\rangle$  pertenecientes a  $\mathcal{H}_B$ . En consecuencia, hemos demostrado que el estado más general del espacio producto se puede escribir siempre como una combinación lineal de estados producto que tiene a lo sumo  $\min(D_A, D_B)$  elementos. Esta descomposición de cualquier estado se denomina *descomposición de Schmidt*, y las bases correspondientes se llaman *bases de Schmidt* (que, obviamente, dependen del estado  $|\psi\rangle_{A,B}$ ). Por último, notemos que la condición de normalización del estado  $|\psi\rangle_{A,B}$  implica que  $\sum_m \Lambda_m^2 = 1$ .

El número de términos que aparecen en la descomposición de Schmidt es una propiedad del estado y lo denominaremos *número de Schmidt* y se denotará como  $S$ . En el caso de un estado producto, tenemos que  $S = 1$  que, como vimos, siempre se cumple que  $S \leq \min(D_A, D_B)$ . Mientras que para estados entrelazados  $S > 1$ .

### 5.3. Operadores sobre un espacio producto.

Los operadores lineales sobre el espacio  $\mathcal{H}_{A,B}$  reflejan la estructura de este espacio (que es el producto tensorial de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ ). Dados dos operadores lineales  $\hat{M}_A$  y  $\hat{N}_B$ , que actúan sobre los espacios de cada una de las partes de un sistema compuesto, podemos definir un operador que actúa sobre el sistema total. Para hacer esto, sólo tenemos que decir cómo actúa ese operador sobre una base de  $\mathcal{H}_{A,B}$  y podemos hacerlo de manera sencilla. Definiremos el operador  $M_A \otimes N_B$  como aquel que cumple

$$(M_A \otimes N_B)|\phi\rangle \otimes |\xi\rangle = M_A|\phi\rangle \otimes N_B|\xi\rangle.$$

Estos operadores son *operadores producto*, transforman estados producto en estados productos. A partir de esta expresión, es inmediato notar que por ejemplo un operador  $M_A$  que actúa sobre  $\mathcal{H}_A$  se representa como  $(M_A \otimes \mathbb{1}_B)$  en el espacio  $\mathcal{H}_{A,B}$ , y en forma análoga para un operador que actúa sobre  $\mathcal{H}_B$ . En cambio, el operador lineal más general no es de esta forma sino que siempre puede escribirse como suma de operadores productos. Es decir, en general cualquier operador lineal sobre  $\mathcal{H}_{A,B}$  puede escribirse como  $O_{A,B} = \sum_m^{D_A^2} \sum_n^{D_B^2} a_{m,n} A_m \otimes B_n$ . En esta expresión, los operadores  $A_m$  y  $B_n$  son una base ortonormal del espacio de operadores sobre el espacio de cada una de las partes<sup>1</sup> (y, por lo tanto, tienen  $D_A^2$  y  $D_B^2$  elementos). Para los operadores podemos derivar un resultado idéntico al de la descomposición de Schmidt, que obtuvimos para los estados. En efecto, podemos probar que el operador lineal más general sobre  $\mathcal{H}_{A,B}$  siempre puede escribirse como

$$O_{A,B} = \sum_{k=1}^{\min(D_A^2, D_B^2)} \alpha_k \tilde{A}_k \otimes \tilde{B}_k. \quad (5.3)$$

Los operadores sobre el espacio de estados del sistema compuesto tienen las mismas propiedades que las mencionadas más arriba (son simplemente operadores sobre un espacio de Hilbert).

### 5.4. Traza parcial

Vimos que dados un operador sobre  $\mathcal{A}$  y otro sobre  $\mathcal{B}$  podemos definir un operador sobre el conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  (el operador producto). Asimismo, vimos que el operador más general no es un producto. Una aplicación inmediata de este formalismo se encuentra relacionada con el concepto de estados entrelazados. En efecto,

<sup>1</sup>Una base ortonormal de operadores se define, en forma análoga al caso de vectores, a partir del siguiente producto interno entre operadores  $(A, B) = \text{Tr}(A^\dagger B)$  que cumple las mismas propiedades que el producto interno entre vectores. Una base ortonormal de operadores en un espacio de Hilbert de dimensión  $D$  es entonces un conjunto de operadores  $\{A_n, n = 1, \dots, D^2\}$  pertenecientes al espacio tal que  $(A_n, A_m) = \text{Tr}(A_n^\dagger A_m) = \delta_{nm}$ . Por ejemplo, para el caso de  $D = 2$  es fácil verificar que  $\{\mathbb{1}/\sqrt{2}, \sigma_x/\sqrt{2}, \sigma_y/\sqrt{2}, \sigma_z/\sqrt{2}\}$  es una base ortonormal de operadores, podemos notar además que en este hecho se basa la representación de matrices densidad y operadores provista en el capítulo anterior.

vimos que los estados entrelazados no pueden ser descriptos a partir del estado de cada una de las partes. Si pensamos en términos de la matriz densidad resulta que si el estado del sistema compuesto es entrelazado, la matriz densidad no puede representarse como  $\rho_A \otimes \rho_B$ . Pero si nos restringimos a realizar experimentos sobre una de las partes,  $\mathcal{A}$  por ejemplo, ¿cuál es la matriz densidad que describe sólo a  $\mathcal{A}$  dado que conocemos la matriz densidad conjunta?

En lo que sigue introduciremos la forma de obtener dicha matriz densidad (reducida al sistema  $\mathcal{A}$ ). Pero en general, veremos la manera de obtener un operador sobre cada parte, dado un operador sobre el conjunto. Es decir, este concepto será aplicable tanto a operadores densidad como a cualquier otro operador del espacio de Hilbert. La operación que nos permite obtener los operadores reducidos se denomina *traza parcial*. Como dijimos, esta operación mapea un operador sobre  $\mathcal{H}_{A,B}$  en otro que actúa sobre  $\mathcal{H}_A$  (o, análogamente, sobre  $\mathcal{H}_B$ ). Para definir la traza parcial, consideremos un operador  $O_{A,B} = \sum_k \alpha_k \tilde{A}_k \otimes \tilde{B}_k$ . Las trazas parciales de este operador sobre  $\mathcal{A}$ , o sobre  $\mathcal{B}$  se definen de la siguiente manera:

$$O_A = \text{Tr}_B(O_{A,B}) = \sum_k \alpha_k \text{Tr}_B(\tilde{B}_k) \tilde{A}_k \equiv \sum_k \tilde{\alpha}_k \tilde{A}_k,$$

$$O_B = \text{Tr}_A(O_{A,B}) = \sum_k \alpha_k \text{Tr}_A(\tilde{A}_k) \tilde{B}_k \equiv \sum_k \tilde{\beta}_k \tilde{B}_k,$$

donde definimos los coeficientes  $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k \text{Tr}_B(\tilde{B}_k)$ ,  $\tilde{\beta}_k = \alpha_k \text{Tr}_A(\tilde{A}_k)$ . Como vemos, estos operadores actúan sobre los espacios de cada una de las partes. En este caso, los operadores  $O_A$  y  $O_B$  se denominan *operadores reducidos*.

## 5.5. El estado del todo y el estado de cada una de las partes

Consideremos un estado puro general del conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ . Este es un estado de máxima información, lo que significa que siempre existe un experimento cuyo resultado puede ser predicho con certeza (dicho experimento consiste en medir cualquier observable que sea diagonal en una base que contenga al estado en cuestión como uno de sus elementos). Si el estado es producto, también tenemos máxima información sobre cada una de las partes. Sin embargo, si el estado puro del conjunto es entrelazado (o sea, si no es un producto), las predicciones sobre resultados de experimentos “locales” (que afecten a cada una de las partes por separado) son mucho más limitadas. Como veremos, los estados entrelazados se caracterizan por tener máxima información sobre el todo, pero por tener información no-máxima sobre cada parte. En efecto, veremos que hay estados entrelazados (los que tienen entrelazamiento máximo) que corresponden a estados de máxima ignorancia sobre cada una de las partes.

Para estudiar esta cuestión primero conviene analizar si es posible definir un estado para cada una de las partes dado que conocemos el estado del conjunto. Supongamos que el estado del conjunto tiene una descomposición de Schmidt tal

que

$$|\psi\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sum_m \Lambda_m |\tilde{\phi}_m\rangle \otimes |\tilde{\xi}_m\rangle.$$

Obviamente, este estado tiene asociada una matriz densidad dada por el proyector que llamaremos

$$\rho_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = |\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\rangle\langle\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|.$$

Usando la forma explícita del estado (en su descomposición de Schmidt) podemos reescribir esto como

$$\rho_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sum_{k,k'} \Lambda_k \Lambda_{k'} |\tilde{\phi}_k\rangle\langle\tilde{\phi}_{k'}| \otimes |\tilde{\xi}_k\rangle\langle\tilde{\xi}_{k'}|. \quad (5.4)$$

A partir de esta expresión podemos calcular las trazas parciales de este operador sobre cada uno de los subsistemas (veremos que estos operadores nos permitirán definir el estado de cada una de las partes). En efecto, usando lo anterior podemos escribir

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A}} &= \text{Tr}_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \\ &= \sum_k \Lambda_k^2 |\tilde{\phi}_k\rangle\langle\tilde{\phi}_k|, \\ \rho_{\mathcal{B}} &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \\ &= \sum_k \Lambda_k^2 |\tilde{\xi}_k\rangle\langle\tilde{\xi}_k|. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Aquí podemos destacar dos cuestiones: (i) la matriz densidad reducida de cada uno de los sistemas tiene los *mismos* autovalores  $\Lambda_k^2$ , y por lo tanto tienen la misma pureza ya que  $\text{Tr} \rho_{\mathcal{A}}^2 = \text{Tr} \rho_{\mathcal{B}}^2$ ; (ii) las matrices reducidas son diagonales en la base de Schmidt. Es decir, la representación de Schmidt se puede obtener simplemente a partir de la diagonalización de cada matriz densidad reducida.

Veremos ahora que  $\rho_{\mathcal{A}}$  y  $\rho_{\mathcal{B}}$  son los operadores que describen a los estados de cada una de las partes. Para demostrar esto basta con probar que estos dos operadores nos permiten predecir las probabilidades de los resultados de cualquier experimento realizado sobre cada subsistema. De esta manera, las probabilidades de los resultados de experimentos realizados sobre  $\mathcal{A}$  se obtienen calculando el valor medio de un proyector de la forma  $P_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$  en el estado  $|\psi\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  (análogamente, lo mismo puede hacerse con el subsistema  $\mathcal{B}$ ). Usando la forma explícita del estado obtenemos

$$\begin{aligned} \langle\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|(P_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}})|\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\rangle &= \sum_{kk'} \Lambda_k \Lambda_{k'} \langle\tilde{\phi}_k|P_{\mathcal{A}}|\tilde{\phi}_{k'}\rangle \langle\tilde{\xi}_k|\mathbb{1}_{\mathcal{B}}|\tilde{\xi}_{k'}\rangle \\ &= \sum_k \Lambda_k^2 \langle\tilde{\phi}_k|P_{\mathcal{A}}|\tilde{\phi}_k\rangle \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por lo tanto, el estado de la parte  $\mathcal{A}$  se encuentra representado por la matriz densidad  $\rho_{\mathcal{A}}$ , ya que a partir de ese operador podemos calcular cualquier probabilidad.

## 5.6. Medidas de entrelazamiento para estados puros

En la sección anterior vimos cómo obtener la matriz densidad reducida a partir de la descripción del sistema completo. Podemos notar además que, a menos que el estado puro de un conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  sea un producto (o sea, que su número de Schmidt sea  $S = 1$ ), el estado reducido de cada parte es mixto (si  $S > 1$  tenemos  $\text{Tr} \rho_{\mathcal{A}}^2 = \text{Tr} \rho_{\mathcal{B}}^2 < 1$ ). En efecto, esto resulta inmediato a partir de la Ec. (5.6) y recordando que por normalización  $\sum_k \Lambda_k^2 = 1$ .

Consideremos ahora dos sistemas con la misma dimensión  $D_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{B}} = D$ , y un estado en el cual todos los coeficientes en la representación de Schmidt tienen el mismo peso  $\Lambda_k^2 = 1/D$ , es decir:

$$|\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i=1}^D |\tilde{\phi}_i\rangle \otimes |\tilde{\xi}_i\rangle \quad (5.7)$$

A estos estados se los denomina *estados máximamente entrelazados*, y tienen dos propiedades fundamentales. (i) alcanzan el número máximo de Schmidt para la dimensión  $S_{max} = D$ , (ii) las matrices densidad reducida son iguales a la identidad  $\rho_{\mathcal{A}} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}/D$  y  $\rho_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}}/D$ . Es decir, un estado como este, en el cual todos los coeficientes de la descomposición de Schmidt son idénticos, es un estado de máxima información sobre el conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  pero de máxima ignorancia sobre cada una de las partes  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

Notemos que esta propiedad de los sistemas compuestos es extremadamente rara: hay estados tales que, si los preparamos, podemos asegurar que existe un experimento realizado sobre el conjunto  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  cuyo resultado puede ser predicho con certeza. Sin embargo, ¡los resultados de todos los experimentos realizados sobre cada una de las partes dan siempre resultados equiprobables! Veremos que esta propiedad crucial de la mecánica cuántica tiene consecuencias notables. En palabras de Schrödinger: el entrelazamiento no es una propiedad más de la mecánica cuántica sino que es aquella que nos obliga a abandonar cualquier descripción de la naturaleza compatible con nuestra intuición clásica.

Es posible definir diferentes medidas del entrelazamiento sobre estados puros de un sistema. Como vimos, lo que distingue a los estados entrelazados de los estados productos es el poder predictivo que tenemos para mediciones locales sobre las partes. Para estados producto, tenemos máxima información sobre las partes, mientras que para estados entrelazados tenemos información no-máxima. Diremos entonces que el entrelazamiento puede ser cuantificado mediante alguna medida de la ignorancia que tenemos para mediciones locales. Para esto pueden utilizarse diversos cuantificadores (entropías, por ejemplo). El más sencillo de todos está determinado por la pureza de cada estado reducido  $\rho_{\mathcal{A}}$  y  $\rho_{\mathcal{B}}$ . En efecto, una medida del entrelazamiento es la pureza de estos estados reducidos que, como vimos, resultan ser iguales  $\eta_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = 1 - \text{Tr} \rho_{\mathcal{A}}^2 = 1 - \text{Tr} \rho_{\mathcal{B}}^2$ . Como vemos,  $\eta_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = 0$  cuando el estado es un producto y es menor que la unidad para estados entrelazados. En particular, para los estados máximamente entrelazados, Eq. (5.7), se alcanza el máximo para cada dimensión  $\eta_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = 1 - 1/D$ .

Esta medida del entrelazamiento es, por cierto, un tanto arbitraria. Una verdadera medida debería estar motivada por alguna razón física. Es decir, la cantidad de entrelazamiento tendría que cuantificar, de alguna forma, una magnitud que pueda relacionarse con otras magnitudes de la física. En las últimas décadas se han identificado algunas tareas más adelante) que sólo pueden ser realizadas en presencia de entrelazamiento entre dos subsistemas. En la actualidad, el entrelazamiento se concibe como un recurso físico que puede generarse, manipularse y utilizarse para realizar alguna tarea (vinculada a la transmisión de información, por ejemplo). Entonces, las medidas más naturales del entrelazamiento se definen en función de esta visión operacional. Sin embargo, en los casos que analizaremos en el curso, la diferencia entre las distintas medidas de entrelazamiento no tendrá un rol importante.

## 5.7. Ejemplo: Dos spines 1/2. Base de Bell.

El estudio de un sistema formado por dos partículas de spin 1/2 no solamente es ilustrativo sobre los aspectos centrales del entrelazamiento sino que también es muy importante y tiene numerosas aplicaciones que veremos más adelante.

Como dijimos más arriba, para que haya entrelazamiento el número de Schmidt en este caso debe ser  $S = 2$  (con  $S = 1$  el estado es un producto). Definiremos ahora una base completa formada por cuatro estados entrelazados, a la que denominaremos *Base de Bell* (por John Bell). Esta base está formada por los estados  $B_{Bell} = \{|\Phi_+\rangle, |\Phi_-\rangle, |\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle\}$ , donde

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (5.8)$$

Notar que aquí utilizamos una notación más compacta, en este caso por ejemplo  $|01\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle$ . La ortonormalidad de estos estados puede ser demostrada de manera directa y por lo tanto los cuatro forman una base del espacio de estados del conjunto formado por los dos spines. Además, podemos verificar fácilmente que los cuatro estados son máximamente entrelazados. Por otra parte, es interesante notar que los estados de Bell son autoestados comunes de un CCOC formado por los siguientes operadores

$$M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x, \quad M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z \quad (5.9)$$

Asimismo, los estados de Bell son autoestados de  $M_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y$ , lo que surge de lo anterior ya que  $M_3 = -M_1 \times M_2$ . Por otra parte, estos dos operadores,  $M_1$  y  $M_2$ , conmutan entre sí pese a estar construidos como producto de factores que no conmutan sobre cada subsistema. Dado que los operadores conmutan, entonces pueden ser medidos simultáneamente, lo que quiere decir que es posible diseñar un aparato de medición que mida  $M_1$  junto con  $M_2$ . Debemos notar que para eso es necesario lograr medir directamente el producto que da lugar a  $M_1$  sin medir cada uno de sus factores, ya que si lo hiciéramos entonces no podríamos medir también



$M_2$ . En efecto, esa estrategia serviría para medir el CCOC definido por  $C_x = \{\sigma_x \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes \sigma_x\}$  que también contiene a  $M_1$ , pero no así a  $M_2$ . El diseño del aparato que solamente mida  $M_1$  junto con  $M_2$  sin medir los factores que los conforman, será discutido más adelante.

Teniendo en cuenta lo anterior, es fácil ver que los estados de Bell cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} M_1|\Phi_+\rangle &= (+1)|\Phi_+\rangle, & M_2|\Phi_+\rangle &= (+1)|\Phi_+\rangle \\ M_1|\Phi_-\rangle &= (-1)|\Phi_-\rangle, & M_2|\Phi_-\rangle &= (+1)|\Phi_-\rangle \\ M_1|\Psi_-\rangle &= (-1)|\Psi_-\rangle, & M_2|\Psi_-\rangle &= (-1)|\Psi_-\rangle \\ M_1|\Psi_+\rangle &= (+1)|\Psi_+\rangle, & M_2|\Psi_+\rangle &= (-1)|\Psi_+\rangle \end{aligned}$$

Efectivamente, esto dice que el autovalor de  $M_1$  es  $+1$  para los estados de tipo “+” ( $|\Phi_+\rangle$  y  $|\Psi_+\rangle$ ), mientras que es  $-1$  para los estados de tipo “-” ( $|\Phi_-\rangle$  y  $|\Psi_-\rangle$ ). Por su parte, el autovalor de  $M_2$  es  $+1$  para los estados de tipo  $|\Phi\rangle$  mientras que es  $-1$  para los estados de tipo  $|\Psi\rangle$ . Los estados de Bell pueden denotarse, entonces, como  $|\beta_{m_1, m_2}\rangle$  donde  $m_1, m_2 = \pm 1$  son los autovalores de  $M_1$  y  $M_2$ . O sea,  $|\beta_{+1, +1}\rangle = |\Phi_+\rangle$ ,  $|\beta_{+1, -1}\rangle = |\Psi_+\rangle$ ,  $|\beta_{-1, +1}\rangle = |\Phi_-\rangle$ ,  $|\beta_{-1, -1}\rangle = |\Psi_-\rangle$ ,

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos afirmar que si preparamos cualquiera de los cuatro estados de Bell y medimos  $M_1$  o  $M_2$  obtendremos una única respuesta con probabilidad 1. En cambio, es fácil demostrar que, como todos los estados son máximamente entrelazados, se cumple que

$$\rho_A = \frac{1}{2}\mathbb{1}_A, \quad \rho_B = \frac{1}{2}\mathbb{1}_B. \quad (5.10)$$

Esto implica que no es posible realizar ninguna predicción con resultados no triviales si medimos alguna propiedad del subsistema  $A$  o del subsistema  $B$ . En el estado máximamente mixto de un spin, la medición de cualquier componente del spin tiene resultados  $\pm\hbar/2$  con probabilidad  $1/2$ .

Para demostrar esta y otras propiedades de los estados de Bell es útil aplicar las siguientes propiedades, cuya demostración se propone como ejercicio:

$$\sigma_j \otimes \mathbb{1} |\beta_{m_1, m_2}\rangle \perp |\beta_{m_1, m_2}\rangle, \quad \mathbb{1} \otimes \sigma_j |\beta_{m_1, m_2}\rangle \perp |\beta_{m_1, m_2}\rangle, \quad (5.11)$$

para todo  $j = x, y, z$ . Lo mismo sucede cuando aplicamos operadores que se obtienen como productos de operadores de Pauli. En efecto,

$$\sigma_j \otimes \sigma_k |\beta_{m_1, m_2}\rangle \perp |\beta_{m_1, m_2}\rangle \quad (5.12)$$

para  $j \neq k$ . Para  $j = k$ , en cambio, estos operadores se reducen a  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3 = -M_1 \times M_2 = \sigma_y \otimes \sigma_y$ . Los autovalores de  $M_1$  y  $M_2$  en los estados de Bell ya fueron mencionados más arriba, y es fácil demostrar que  $M_3 |\beta_{m_1, m_2}\rangle = -m_1 \cdot m_2 |\beta_{m_1, m_2}\rangle$ .

La matriz densidad de los estados de Bell puede escribirse como combinación lineal de una base completa del espacio de los operadores sobre el espacio del sistema compuesto. En efecto, cualquier matriz densidad conjunta puede escribirse como

$$\rho_{A,B} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + (\vec{p}_A \cdot \vec{\sigma}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes (\vec{p}_B \cdot \vec{\sigma}) + \sum_{j,k} K_{j,k} \sigma_j \otimes \sigma_k \right). \quad (5.13)$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, es fácil ver que para los estados de Bell obtenemos

$$\rho_{m_1, m_2} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + m_1 \sigma_x \otimes \sigma_x - m_1 m_2 \sigma_y \otimes \sigma_y + m_2 \sigma_z \otimes \sigma_z \right).$$

Los estados entrelazados se caracterizan por tener correlaciones muy fuertes entre los resultados de los experimentos que se realizan sobre cada una de las partes  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Supongamos que tenemos dos partículas y realizamos mediciones de la componente  $\vec{a}$  del spin del subsistema  $\mathcal{A}$ , y la componente  $\vec{b}$  del spin del subsistema  $\mathcal{B}$ . Como son mediciones de operadores que actúan sobre cada subsistema, podemos pensar que la medición del subsistema  $\mathcal{A}$  se realiza en un laboratorio y la del subsistema  $\mathcal{B}$  en otro (para simplificar la notación, como  $S_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ , en general simplemente nos referiremos a la medición del observable asociado a  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ ). Calculemos la función de correlación del experimento en cuestión. Esta función se define como la diferencia entre la media del producto de los resultados de las mediciones y el producto de los valores medios, es decir,  $K(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \rangle \langle \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \rangle$ . Es evidente que la función de correlación será nula si la distribución conjunta de los resultados de las mediciones de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es un producto de las dos distribuciones marginales. La función de correlación en cualquiera de los estados de Bell resulta ser:

$$K_{m_1, m_2}(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \beta_{m_1, m_2} | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} | \beta_{m_1, m_2} \rangle, \quad (5.14)$$

donde utilizamos el hecho de que el valor medio de cualquier operador de Pauli en un estado de Bell se anula. La forma explícita del estado nos permite expresar

$$K_{m_1, m_2}(\vec{a}, \vec{b}) = m_1 a_x b_x - m_1 m_2 a_y b_y + m_2 a_z b_z. \quad (5.15)$$

En particular, para el estado “singlete”  $|\beta_{-1, -1}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$  la función de correlación resulta particularmente simple:

$$K_{-1, -1}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (5.16)$$

Por último, y por completitud, vamos a calcular las probabilidades conjuntas para los resultados de los experimentos realizados en los laboratorios en los que se encuentran cada uno de los spines. Recordemos que en un laboratorio se mide  $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$  y en el otro se mide  $\vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ . Los resultados de ambos experimentos son  $\epsilon_a = \pm 1$  y  $\epsilon_b = \pm 1$ . Como sabemos, las probabilidades se calculan como el valor medio de los correspondientes proyectores, que pueden escribirse como

$$P_{\epsilon_a, \epsilon_b} = \frac{1}{2} \left( I + \epsilon_a \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \right) \otimes \frac{1}{2} \left( I + \epsilon_b \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \right).$$

Al tomar el valor medio de este operador podemos usar los resultados que obtuvimos hasta ahora: (i) cualquier operador de Pauli actuando sobre un estado de Bell lo transforma en otro estado de Bell ortogonal al anterior; (ii) lo mismo sucede cuando aplicamos cualquier operador de la forma  $\sigma_j \otimes \sigma_k$  salvo cuando  $j = k$  (y

en ese caso los valores medios son iguales a  $m_1$ ,  $-m_1 \times m_2$  y  $m_2$  cuando  $j = x, y, z$  respectivamente). Teniendo en cuenta esto, la probabilidad conjunta para un dado el estado  $|\beta_{m_1, m_2}\rangle$  resulta

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\epsilon_a, \epsilon_b | m_1, m_2) &= \langle \beta_{m_1, m_2} | P_{\epsilon_a, \epsilon_b} | \beta_{m_1, m_2} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \epsilon_a \epsilon_b (m_1 a_x b_x - m_1 m_2 a_y b_y + m_2 a_z b_z) \right) \end{aligned}$$

En el caso particular del estado singlete, tenemos que  $m_1 = m_2 = -1$  y entonces las probabilidades anteriores pueden escribirse como  $\text{Prob}(\epsilon_a, \epsilon_b | -1, -1) = \frac{1}{4}(1 - \epsilon_a \epsilon_b \vec{a} \cdot \vec{b})$ . En cambio, para el estado  $|\Phi_+\rangle$  resulta que  $m_1 = +1$  y  $m_2 = +1$  y por lo tanto la probabilidad conjunta es  $\text{Prob}(\epsilon_a, \epsilon_b | +1, +1) = \frac{1}{4}(1 + \epsilon_a \epsilon_b (a_x b_x - a_y b_y + a_z b_z))$ . Como vemos, en todos los casos estas probabilidades conjuntas tienen las siguientes propiedades: (a) Las probabilidades marginales son triviales (por ejemplo  $\text{Prob}(\epsilon_a | -1, -1) \equiv \sum_{\epsilon_b} \text{Prob}(\epsilon_a, \epsilon_b | -1, -1) = \frac{1}{2}$ ), (b) Las probabilidades conjuntas no pueden escribirse como un producto de las probabilidades marginales (lo cual es la manifestación obvia de que los resultados no son independientes ino que están correlacionados).

## 5.8. Correlaciones clásicas

Es importante destacar que la existencia de correlaciones entre las partes de un sistema completo no es una propiedad que caracterice a la mecánica cuántica. Por el contrario, las correlaciones entre eventos distantes (observaciones en laboratorios espacialmente separados, por ejemplo) también existen en sistemas clásicos. Lo que caracteriza a los sistemas cuánticos es la naturaleza de dichas correlaciones. Más adelante veremos que las correlaciones predichas por la mecánica cuántica son cualitativamente y cuantitativamente diferentes de aquellas predichas por cualquier modelo físico compatible con nuestro sentido común.

Veremos aquí un ejemplo de un sistema clásico en el que aparecen correlaciones fuertes y que es análogo al sistema de dos spines descrito por el estado singlete  $|\Psi_-\rangle$ . Consideramos un objeto macroscópico, una piedra por ejemplo, que se encuentra inicialmente en reposo con respecto a algún sistema de coordenadas. Inicialmente el momento angular del sistema es  $\vec{J}_S = 0$ . En un dado instante el objeto estalla y se divide en dos fragmentos, que llamaremos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Debido a la conservación del momento angular, si uno de los dos fragmentos adquiere un momento angular  $\vec{J}$ , el otro necesariamente tendrá momento angular  $-\vec{J}$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $\vec{J}_A = \vec{J}$  y  $\vec{J}_B = -\vec{J}$ . Supongamos que cada fragmento se dirige a un laboratorio distinto. En un laboratorio se mide el signo de la proyección del momento angular  $\vec{J}_A$  en la dirección del eje  $\vec{a}$  y en el otro, análogamente, se mide  $\text{sign}(\vec{J}_B \cdot \vec{b})$ . Estas son dos variables dicotómicas, que toman siempre valores que son iguales a  $\pm 1$ . En ese sentido, estas mediciones son análogas a las que se realizan con una partícula de spin 1/2 en la cual siempre se obtienen dos resultados. El experimento se repite muchas veces y en cada ocasión el mecanismo

que da lugar a la explosión genera un momento angular diferente. Supondremos que ese mecanismo es isótropo y no elige ninguna dirección privilegiada. Es decir, en cada evento (cada explosión) el momento angular  $\vec{J}$  es una variable que es elegida al azar sobre una esfera unidad.

Es evidente que los resultados de las mediciones en los dos laboratorios no son, en general, independientes sino que están correlacionados. Por ejemplo, si en ambos laboratorios se mide el momento angular en la misma dirección (o sea,  $\vec{a} = \vec{b}$ ) entonces los resultados siempre están correlacionados ya que el momento angular total es nulo. Obviamente esto se cumple para cualquier elección del vector  $\vec{a}$ .

En este ejemplo es posible además calcular la función de correlación. Para eso, consideramos que  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  (o sea,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$ ). Cada uno de estos vectores define un plano ecuatorial que divide la esfera unidad en dos hemisferios. Si el vector  $\vec{J}$  apunta hacia el hemisferio norte definido por la dirección del vector  $\vec{a}$ , las mediciones en el laboratorio  $\mathcal{A}$  dará como resultado  $\text{sign}(\vec{J}_{\mathcal{A}} \cdot \vec{a}) = +1$  (y si apunta en la dirección del hemisferio sur el resultado será  $-1$ ). Por su parte, lo mismo ocurre con las mediciones en el laboratorio  $\mathcal{B}$ : Si  $\vec{J}$  apunta en la dirección del hemisferio norte definido por  $\vec{b}$  tendremos  $\text{sign}(\vec{J}_{\mathcal{B}} \cdot \vec{b}) = +1$ , etc. Entonces, recordando la convención que utilizamos  $\vec{J}_{\mathcal{A}} = \vec{J}$  y  $\vec{J}_{\mathcal{B}} = -\vec{J}$ , en ambos laboratorios se obtendrán valores  $+1$  cuando  $\vec{J}$  apunte hacia el norte de  $\vec{a}$  y hacia el sur de  $\vec{b}$ . Análogamente los resultados  $(+1, -1)$  corresponden a vectores  $\vec{J}$  que apunten en la dirección del norte de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Entonces, dado que el valor medio de los experimentos locales se anula, la función de correlación en este caso resulta:

$$K_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{A_{NS} + A_{SN} - A_{NN} - A_{SS}}{A_T}$$

donde  $A_{NN}$  es el área de la región de la esfera unidad que se forma por la intersección de los dos hemisferios norte (análogamente para  $A_{NS}$ ,  $A_{SS}$  y  $A_{SN}$ ) y  $A_T$  es el área total de la esfera unidad. Para llegar a este resultado podemos notar que la probabilidad de que  $\vec{J}$  apunte en ambos casos hacia el norte es  $A_{NN}/A_T$ , ya como la dirección inicial de  $\vec{J}$  es completamente aleatoria, la probabilidad queda determinada por el área relativa de la región. En este caso, el resultado de las mediciones será  $(+1, -1)$  y por lo tanto el producto de ellos es  $-1$ , es decir obtendremos  $-1$  como resultado conjunto con probabilidad  $A_{NN}/A_T$ . Aplicando el mismo razonamiento para los demás resultados llegamos a la expresión anterior. Es fácil calcular las áreas de cada región, ver Fig. 5.1. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{A_{NS}}{A_T} &= \frac{A_{SN}}{A_T} = \frac{\theta}{2\pi}, \\ \frac{A_{NN}}{A_T} &= \frac{A_{SS}}{A_T} = \frac{\pi - \theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de correlación es

$$K_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{b}) = -\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)$$

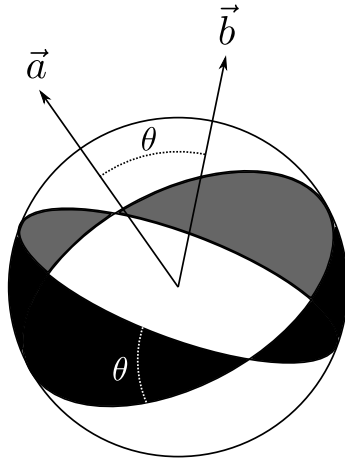


Figura 5.1: Esfera unidad junto con los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Las áreas negras son las que llamamos  $A_{NS}$  y  $A_{SN}$ . Cuando  $\vec{J}$  apunta en esas regiones el producto de los resultados de las mediciones es +1.

Es interesante notar que si  $\theta = 0$  la función de correlación es siempre igual a  $-1$  lo que refleja que en ese caso las variables están perfectamente anti correlacionadas. En cambio, cuando  $\theta = \pi/2$  la función de correlación se anula (mientras que si  $\theta = \pi$  la función de correlación es +1). Este resultado debe ser comparado con lo que obtuvimos para el estado singlete que, como vimos mas arriba, que resulta ser

$$K_{-1,-1}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos \theta$$

Ambas funciones de correlación coinciden en los puntos  $\theta = 0, \pi/2, \pi$  pero no coinciden en puntos intermedios. Este ejemplo, ilustra el desacuerdo entre las correlaciones clásicas y cuánticas que se manifiesta en un nivel púramente cuantitativo. Veremos que ese desacuerdo trae aparejadas consecuencias realmente notables.

## 5.9. Contextualidad: un ejemplo con dos spines

Como dijimos, la mecánica cuántica resulta ser incompatible con la idea de que los resultados de los experimentos pre existen a la medición. En el caso de un sistema de dos partículas de spin 1/2 es posible poner esto de manifiesto de manera contundente. Ya hemos visto que no es posible suponer que cualquier componente del spin toma un valor  $\pm\hbar/2$  antes de la medición, y a la vez mantener la hipótesis de consistencia funcional que establece que los valores de las propiedades cumplen con las mismas relaciones funcionales que estas. Pero, como dijimos, el argumento puede ser cuestionado desde varios puntos de vista. La primera hipótesis es demasiado fuerte ya que estamos suponiendo que es posible asignarles valores (pre existentes a la medición) a observables incompatibles, que no pueden ser medidos simultáneamente. Podemos relajar un poco esta hipótesis y jugar con otra

mas débil: supongamos que solamente podemos asignar valores a observables que forman un CCOC. En el caso de un spin, esta hipótesis no conduce a nada ya que hay un único observable no trivial en cada CCOC. Pero para espacios de dimensión más alta es posible derivar consecuencias interesantes de esta hipótesis que nos permiten mostrar la incompatibilidad de la mecánica cuántica con un conjunto de teorías “muy razonables”. Supongamos entonces que en un sistema físico los valores de los observables que forman un CCOC están definidos y que la medición de los mismos “revela” ese valor. Si el CCOC está formado por los observables  $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots\}$ , podremos asignarles a estos observables valores bien definidos que llamaremos  $C = \{v(\hat{A}), v(\hat{B}), v(\hat{C}), \dots\}$ . Supondremos también que vale la hipótesis de consistencia funcional, que dice que si hay una relación funcional entre los operadores, esa misma relación debe cumplirse para los valores de los mismos. En otras palabras, si vale una relación del tipo  $F(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots) = 0$  entonces debe valer también la relación  $F(v(\hat{A}), v(\hat{B}), v(\hat{C}), \dots) = 0$ .

Ahora bien, el observable  $\hat{A}$  puede formar parte de muchos CCOC. Por ejemplo, supongamos que el conjunto  $C' = \{\hat{A}, \hat{B}', \hat{C}', \dots\}$  es un CCOC. Esto quiere decir que el observable  $\hat{A}$  puede ser medido en distintos “contextos”, los que están definidos por los otros observables compatibles con  $\hat{A}$  que decidimos medir junto con él. La hipótesis anterior nos permite asignar valores simultáneos a todos los observables del conjunto  $C'$ . Es decir, podemos decir que en el sistema están bien definidos  $v'(\hat{A}), v; (\hat{B}'), v'(\hat{C}'), \dots$ . Pero: ¿qué relación hay entre  $v(\hat{A})$  y  $v'(\hat{A})$ ? Ambos son los valores asignados al observable  $\hat{A}$  en distintos contextos. La hipótesis de “no contextualidad” es la que dice que ambos son idénticos, o sea, que el valor de un observable no depende del contexto y  $v(\hat{A}) = v'(\hat{A})$ . Esta es una hipótesis adicional, muy fuerte, que suena muy razonable. En efecto, para justificarla podríamos imaginar una secuencia de mediciones de los observables en la cual primero medimos el observable  $\hat{A}$  y luego decidimos los otros observables medir. Si es posible realizar una secuencia de este tipo (lo cual se ha hecho en varios experimentos en los que los observables se miden de uno a la vez con aparatos que no definen un contexto) entonces la hipótesis de no contextualidad es equivalente a la hipótesis que dice que el valor del observable pre existe a la medición.

Es fácil ver, usando un sistema de dos partículas de spin 1/2, que las teorías (realistas) no contextuales que satisfacen la consistencia funcional, son incompatibles con la mecánica cuántica. Esto se demuestra de la siguiente manera. Consideremos los siguientes nueve observables:

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \mathbb{1} & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_y \otimes \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Es fácil demostrar que los tres observables pertenecientes a cualquier fila o cualquier columna de esta matriz forman un CCOC. Cada observable, entonces, pertenece a dos contextos distintos (el de la fila y el de la columna). Por otra parte es fácil ver que  $M_{j,1} \times M_{j,2} = M_{j,3}$  para todo valor de  $j = 1, 2, 3$  (el último elemento de cada fila es el producto de los otros dos). En cambio, para las dos primeras columnas  $k = 1, 2$  se cumple que  $M_{1,k} \times M_{2,k} = M_{3,k}$  pero para la tercera fila vale

$M_{3,1} \times M_{3,2} = -M_{3,3}$ . Estas seis identidades definen relaciones funcionales dentro de cada uno de los CCOC's formados por las filas y columnas. De acuerdo a nuestro razonamiento anterior, debería ser posible asignar valores a los observables de cada fila y cada columna. Si lo hacemos de manera no contextual, eso quiere decir que podemos escribir seis identidades de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
v(\sigma_x \otimes \mathbb{1}) \times v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= v(\sigma_x \otimes \sigma_x) \\
v(\sigma_z \otimes \mathbb{1}) \times v(\mathbb{1} \otimes \sigma_z) &= v(\sigma_z \otimes \sigma_z) \\
v(\sigma_x \otimes \sigma_z) \times v(\sigma_z \otimes \sigma_x) &= v(\sigma_y \otimes \sigma_y) \\
v(\sigma_x \otimes \mathbb{1}) \times v(\mathbb{1} \otimes \sigma_z) &= v(\sigma_x \otimes \sigma_z) \\
v(\sigma_z \otimes \mathbb{1}) \times v(\mathbb{1} \otimes \sigma_x) &= v(\sigma_z \otimes \sigma_x) \\
v(\sigma_x \otimes \sigma_x) \times v(\sigma_z \otimes \sigma_z) &= -v(\sigma_y \otimes \sigma_y)
\end{aligned}$$

Esto lleva inevitablemente a una contradicción si además recordamos que todos los valores de estos observables  $v(\hat{A} \otimes \hat{B}) = \pm 1$ . En efecto, si multiplicamos las seis identidades obtenemos una identidad en la que cada uno de los valores en cuestión aparece dos veces. Por lo tanto todos los productos que están del lado izquierdo de la ecuación que obtenemos serán iguales a (+1), mientras que lo que obtenemos del lado izquierdo será siempre igual a (-1). Entonces, el conjunto de ecuaciones anterior se reduce a  $+1 = -1$ , lo cual es obviamente absurdo.

El absurdo proviene de suponer todas las hipótesis anteriores: que los valores de todos los elementos de un CCOC pre existen a la medición (y son iguales al valor medido), que el valor de un observable es independiente del contexto y que los valores de los observables cumplen las mismas relaciones funcionales que los propios observables. Lo que hemos demostrado es que estas hipótesis (totalmente compatibles con nuestro sentido común) son incompatibles con la mecánica cuántica. ¿Qué quiere decir esto? Obviamente la mecánica cuántica está fundada sobre otras hipótesis lo cual implica que no es extraño que otra teoría fundada en otras hipótesis sea incompatible con ella (está escrita, inclusive, en otro lenguaje). Lo que implica lo anterior es que si alguna vez la mecánica cuántica es reemplazada por otra teoría que la supere y que mantenga las predicciones de la mecánica cuántica que han sido comprobadas hasta el presente, entonces esa teoría superadora no podrá satisfacer las hipótesis discutidas más arriba (realismo, contextualidad, consistencia funcional).