

# Introducción no histórica. Estados, operadores, probabilidades

## 1.1. Introducción

La mecánica cuántica nació hace más de un siglo. Lo hizo de manera turbulenta cuando un grupo cada vez más grande de físicos tomó conciencia de que la emisión y absorción de la luz por la materia no podía ser comprendida dentro del marco de las leyes de la física formuladas hasta ese momento. Por esa época reinaban sobre la física el electromagnetismo de Maxwell, la mecánica de Newton y la termodinámica de Boltzmann. La formulación de la nueva mecánica fue una tarea titánica que recayó en personalidades como Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Fermi, de Broglie, von Neumann, Born, Pauli y muchos otros. El desarrollo de esta teoría comenzó en 1900 y recién cerca de 1930 adquirió finalmente coherencia y solidez internas. Sin embargo los debates sobre los fundamentos y la interpretación de la mecánica cuántica no se han acallado y muchos todavía consideran que existen problemas abiertos, como el famoso “problema de la medición”.

Teniendo en cuenta que la mecánica cuántica ya cuenta con su mayoría de edad evitaremos utilizar aquí un enfoque histórico para presentarla. Tal enfoque puede ser encontrado en la mayoría de los libros de texto y de divulgación científica escritos hasta el presente. Por el contrario, apelaremos a una introducción “brutal” describiendo las bases conceptuales y los aspectos más anti-intuitivos de la física cuántica. El objetivo de estos primeros capítulos es motivar, a partir de la discusión de experimentos concretos, el escenario de la mecánica cuántica. Es decir, motivar la descripción de los estados de un sistema físico y de sus propiedades observables así como también el poder predictivo de la mecánica cuántica.

La física clásica describe a los estados de un sistema físico de una manera relativamente sencilla. Por ejemplo, el sistema (idealizado) típico es la partícula puntual y su estado se describe mediante un punto en el espacio de las fases. Dicho espacio tiene 6 dimensiones: tres coordenadas que definen la posición del objeto y otras tres que definen su momento. Es decir, el estado de la partícula queda completamente definido si conocemos la posición y el momento. Cabe notar que estas dos magnitudes (posición y momento) son propiedades observables de la partícula: pueden medirse con precisión arbitrariamente alta (con instrumentos que introduzcan una perturbación arbitrariamente pequeña).

En cambio, la mecánica cuántica describe al estado de un sistema de una manera drásticamente distinta, mucho más abstracta. La principal diferencia es que el estado ya no está unívocamente asociado a las propiedades observables sino que ambos personajes, que son centrales en la física (estado y propiedades), se describen de manera muy distinta. El origen de la diferencia es que la mecánica cuántica acepta un hecho empírico, que hasta su surgimiento no había sido notado: no es posible determinar los valores de todas las propiedades de un sistema simultáneamente. El proceso de medición, en la física clásica puede ser considerado como un acto inocuo (si bien cualquier aparato real causa un efecto sobre el objeto medido, siempre imaginamos que en principio nada nos impide construir otro que lo perturbe menos). Como veremos, en la mecánica cuántica el proceso de medición se describe como una interacción y todas aquellas cosas que denominamos “propiedades observables” de un sistema sólo definen “canales” mediante los cuales el sistema puede interactuar con el resto del universo. Usando una terminología más precisa, todo aquello que en la física clásica denominamos propiedad observable será en mecánica cuántica una magnitud que estará determinada por el Hamiltoniano de interacción entre el sistema y el resto del mundo. La descripción cuántica de los estados físicos se hará en término de vectores que viven en un espacio vectorial con una estructura matemática bien definida (un espacio de Hilbert). Correspondientemente, veremos que las propiedades observables (la posición, el momento, el spin, etc.) cambio, se describen en la mecánica cuántica como operadores lineales que actúan en ese espacio de estados.

Más adelante discutiremos algunas de las consecuencias más radicales de la mecánica cuántica que surgen inevitablemente a partir de esta descripción. Por ejemplo, discutiremos la bien conocida propiedad que establece que no todos los observables pueden ser medidos simultáneamente. Pero también, discutiremos la incompatibilidad de la mecánica cuántica con toda teoría que acepta la idea de que estas propiedades observables tienen valores definidos (es decir, son realmente una “propiedad del sistema”) aunque no los midamos. La mecánica cuántica sólo es compatible con modelos sobre la naturaleza en la que se acepta el principio que condensó Asher Peres en una frase: “Los experimentos que no se realizan, no tienen resultados”. Si bien este no es el objetivo de este libro, ni del curso, tomaremos un tiempo para discutir las implicancias filosóficas de estas ideas, que parecieran conducir inevitablemente al idealismo (o inclusive al solipsismo). Esto no es así ya que la mecánica cuántica, pese a ser tan rara, es perfectamente compatible con la idea que acepta la existencia de una realidad objetiva externa a nosotros (lo que el

solipsismo niega) pero establece claramente cuales son los límites que existen en las formas en las que podemos interactuar con esos objetos.

## 1.2. El estado de un sistema

Antes de motivar la descripción cuántica del estado de un sistema, es necesario definir con precisión qué es lo que entendemos por ese concepto. Diremos que el “estado puro de un sistema físico es la máxima información necesaria para predecir los resultados de todos los experimentos posibles sobre dicho sistema”.

Cabe acotar que aquí estamos utilizando una descripción del estado en términos de “información” y por lo tanto esta es una descripción subjetiva del estado ya que la información está disponible para un dado observador (el que preparó al sistema en ese estado). Otra definición equivalente es la que presenta Asher Peres en su celebrado texto: un estado es una clase de equivalencia de procesos de preparación. Es decir, un estado está asociado a un procedimiento experimental que lo prepara. Este proceso es una sucesión de acciones físicas que se ejecutan sobre el sistema en cuestión y que, como resultado, lo preparan en un cierto estado.

Decimos que el estado es la información necesaria para “predecir” resultados de todos los experimentos. Esto en mecánica clásica tiene una interpretación muy clara: si conocemos la posición y la velocidad de una partícula podremos predecir todas sus magnitudes observables (y si conocemos las fuerzas que actúan sobre la partícula podremos predecir sus valores en cualquier instante). En cambio, en la mecánica cuántica solamente podremos predecir probabilidades, no certezas. Este acto de renunciamiento intelectual (aceptar que no podremos predecir certezas sino probabilidades) es un renunciamiento al que los físicos se han resistido denodadamente. No es sencillo aceptarlo, pero la mecánica cuántica está construida sobre esa idea: “sólo podremos predecir probabilidades y no certezas”. En algunos casos, como se da con (los llamados “estados puros” o estados de máxima información,) podremos predecir con certeza el resultado de algunos experimentos pero habrá una cantidad infinita de experimentos para los cuales deberemos contentarnos con probabilidades.

Naturalmente surge la pregunta: “¿Cuál es el motivo por el cual podemos predecir solamente probabilidades y no certezas?”. La mecánica cuántica no responde esta pregunta, acepta ese hecho como una propiedad de la naturaleza. Y, como dijimos más arriba, acepta ese hecho obligada por una abrumadora evidencia experimental a su favor. Mas aún, por si lo anterior fuera poco, veremos a lo largo del curso que es posible demostrar que las predicciones de la mecánica cuántica son incompatibles con aquellas en las cuales las probabilidades se originan en nuestra ignorancia sobre los pequeños detalles del sistema o en nuestra incapacidad de controlar todas las variables en un experimento (ruido). Efectivamente, podremos demostrar que las probabilidades cuánticas NO se originan en nuestra ignorancia. Pero entonces: ¿dónde se originan? Debemos reconocer que ignoramos la respuesta a esta pregunta. La mecánica cuántica parece compatible solamente con teorías que aceptan la existencia de una fuente de azar intrínseco en la naturaleza.

### 1.3. El estado de un spin 1/2, la más cuántica de las propiedades.

El spin es una propiedad de algunas partículas que fue descubierta en 1922 en experimentos realizados por Otto Stern y Wolfgang Gerlach. Una partícula con spin lleva consigo un pequeño imán que, como todo imán, tiene dos polos y puede describirse utilizando una flecha imaginaria (un vector) que se dirige desde el polo sur hacia el norte. La longitud de la flecha (el módulo del vector) es proporcional a la intensidad del imán. Como veremos, imaginar al spin como una flecha es una sobre-simplificación ya que este personaje tiene muchas características sorprendentes. La más sorprendente de todas ellas es la siguiente: cuando medimos la proyección del spin a lo largo de una dirección cualquiera obtenemos sólo una cantidad finita de valores posibles.

El experimento que permitió descubrir el spin fue realizado, como dijimos, por Stern y Gerlach con un aparato descrito esquemáticamente en la Figura 1.1: En el experimento original, se calentaban átomos de Ag en un horno con un orificio en un lado por el que se generaba un haz de átomos y se extraía un haz por un orificio. El haz era colimado con aperturas que seleccionaban sólo los átomos se moviera aproximadamente en una dirección (digamos que es la dirección del versor  $\vec{e}_x$ ). Luego, una vez colimado, el haz ingresa en una región contenida entre los polos de un imán cuidadosamente diseñado de modo tal que genera un campo magnético que apunta en una dirección perpendicular a la del movimiento del haz (tomemos esta dirección como la del versor  $\vec{e}_z$ ). El campo es inhomogéneo, es decir, su intensidad además depende de la posición  $z$ :  $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ .

El objetivo del experimento era estudiar el origen del magnetismo en los átomos (o las propiedades magnéticas de ciertos átomos). Sin embargo, también existía una motivación fuerte por encontrar huellas de la mecánica cuántica en el momento dipolar magnético ya que la teoría de Sommerfeld predecía que todo vector que jugara el rol del momento angular debía estar cuantizado y adoptar valores discretos.

La idea del experimento es sencilla: si un átomo tuviera una dada magnetización, llevaría consigo un momento dipolar magnético  $\vec{\mu}$ . Al ingresar al imán este momento magnético interactúa con el campo magnético del imán mediante un término de interacción en el Hamiltoniano que es de la forma  $H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  (es decir, el momento magnético tendería a alinearse en forma antiparalela con el campo). Como el campo es inhomogéneo, el término de interacción depende de la posición del átomo:  $H_{int} = -\mu_z B(z)$ . Por lo tanto, aparecerá una fuerza sobre el átomo en la dirección  $\vec{e}_z$  que se puede obtener a partir del gradiente de  $H_{int}$ , es decir:  $F_z = \mu_z \partial_z B(z)$ . Si consideramos el campo magnético  $B(z)$  a primer orden en  $z$  escribiremos  $B(z) = zB'$ , donde  $B'$  es el gradiente del campo magnético. Entonces la fuerza será, a este orden,  $F_z = \mu_z B'$ . De esta manera, los átomos desviarán su trayectoria en la dirección  $\vec{e}_z$  en una cantidad proporcional al valor de  $\mu_z$ . Conociendo la velocidad de los átomos (que define el tiempo durante el cual permanecen dentro del imán y son afectados por la mencionada fuerza) podemos calcular la desviación

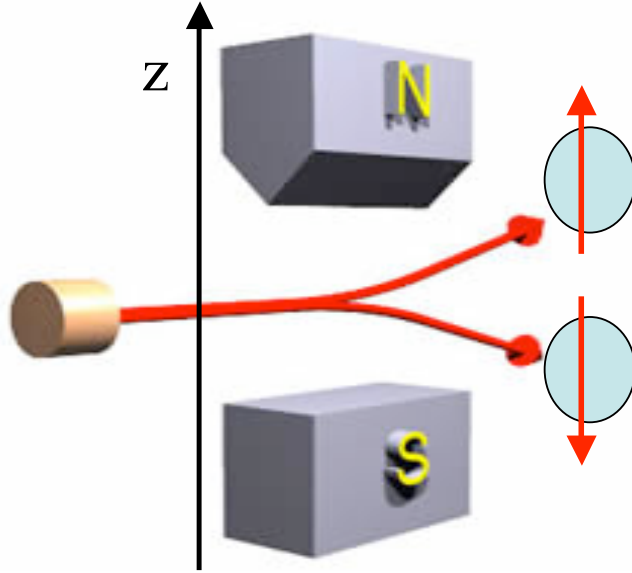


Figura 1.1: Cuando un haz de partículas con spin 1/2 atraviesa un campo magnético que aumenta en la dirección  $\hat{z}$  se divide en dos componentes (una para cada valor de la componente  $\hat{z}$  del spin). Imagen extraída de: <https://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/SternGerlach/SternGerlach.html>

de la trayectoria en función de  $\mu_z$ . En resumen: el aparato construido por Stern y Gerlach puede interpretarse simplemente como un “instrumento de medición de la propiedad  $\mu_z$ ”.

Cuando se realizó el experimento, el resultado obtenido fue sorprendente. Nuestra intuición clásica nos diría lo siguiente: si dentro del horno en el que se preparan los átomos no hay ninguna dirección privilegiada (isotropía) entonces se espera que los átomos salgan del horno tomando todos los valores posibles de  $\mu_z$  distribuidos entre un valor máximo  $\mu_0$  y uno mínimo  $-\mu_0$  ( $\mu_0$  sería entonces la magnitud del momento dipolar atómico  $\vec{\mu}$ ). En esta situación el resultado esperado del experimento de SG es que los átomos tendrían que sufrir todas las desviaciones posibles que corresponden a todos los valores entre  $\pm\mu_0$ . Claramente, en un experimento como este, podríamos extraer el valor de  $\mu_0$ . Sin embargo, lo que se observó fue que los átomos sufrían sólo dos desviaciones, compatibles con dos valores precisos de  $\mu_z = \pm\mu_0$ . Estos dos valores pudieron ser medidos y resultaron ser  $\mu_0 = g\hbar/2m$  donde  $m$  y  $e$  son la masa y la carga del electrón,  $g$  es el factor giromagnético del electrón (que es  $g = 2$ ) y  $\hbar$  resultó ser la constante de Planck  $\hbar = h/2\pi = 1,05457 \times 10^{-34}$  Joules  $\times$  seg. Es decir, la desviación en los haces luego de atravesar el imán es  $\Delta x = e\hbar B' L^2 / 2Mmv_0^2$  donde  $M$  es la masa de los átomos,  $L$  es la longitud del imán y  $v_0$  es la velocidad de los átomos (sugerimos al lector deducir esta fórmula por su cuenta.) Para que la separación entre los haces sea

significativa es necesario usar imanes que generen valores de  $B'$  suficientemente grandes y átomos suficientemente lentos). En el imán original el gradiente del campo magnético era de alrededor de  $10^3$  T/m, la velocidad era de alrededor de  $v_0 = 500$  m/seg y el largo de imán era  $L=35$  mm. Esto da lugar a desviaciones de alrededor de  $\Delta x = 141 \mu\text{m}$ , un número pequeño pero observable en un microscopio.

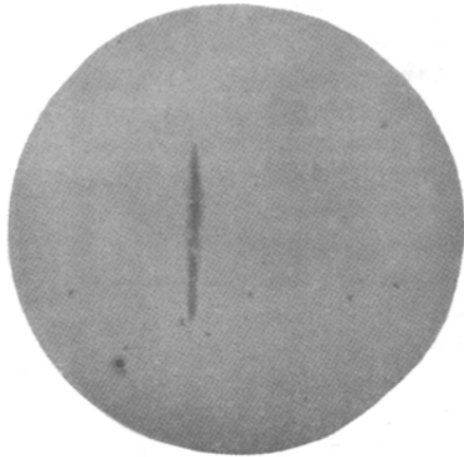


Fig. 2.

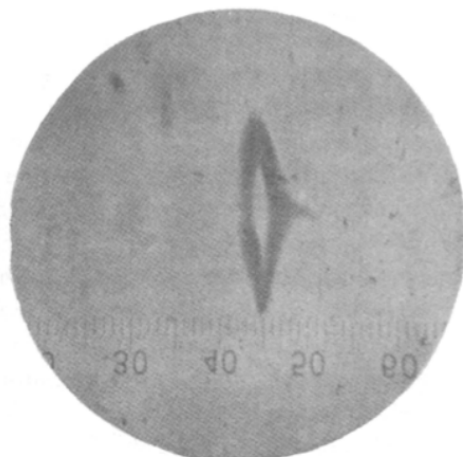


Fig. 3.

Figura 1.2: Resultado del experimento de Stern y Gerlach, extraído de Zeitschrift für Physik. 9, 349–352 (1922). A la izquierda el resultado sin campo magnético y a la derecha con campo magnético. Se mide una separación mínima de  $110 \mu\text{m}$  y una media de  $200 \mu\text{m}$  (la regla milimétrica que se muestra tiene una magnificación de  $\times 20$ ).

El experimento fue repetido numerosas veces y los resultados fueron confirmados con precisión asombrosa. El mismo resultado se obtiene si el eje del imán se alinea en cualquier otra dirección. Es decir, cada vez que medimos alguna componente de  $\vec{\mu}$  ( $\mu_x$ ,  $\mu_y$  o  $\mu_z$ , por ejemplo) obtenemos solamente dos resultados.

Si bien este resultado es sorprendente, son mucho más sorprendentes los resultados que se obtienen a partir del estudio de secuencias de experimentos de SG. Analizaremos estas secuencias en lo que sigue. Para ello, definiremos a partir del vector  $\vec{\mu}$  otro vector al que llamaremos spin, que es tal que  $\vec{\mu} = g e \vec{S} / mc$ . Los resultados anteriores implican que la medición de cualquier componente del spin  $\vec{S}$  da como resultado los valores  $\pm \hbar / 2$ . En estos términos, diremos que el experimento de SG mide alguna componente del spin.

## 1.4. Secuencias de experimentos de SG

Por simplicidad, usaremos un esquema sencillo para denotar lo que sucede en un experimento como el de Stern y Gerlach. Evitaremos todos los detalles y di-

cho experimento será descrito por un diagrama como el de la Figura 1.3. En ese esquema, el vector  $\vec{e}_n$  denota la dirección del campo magnético del imán. El dispositivo separa un haz entrante en dos componentes. Es importante destacar que en el diagrama NO incluimos la pantalla donde colectamos los átomos sino solamente el proceso de separación que permite obtener dos haces a partir de uno solo.

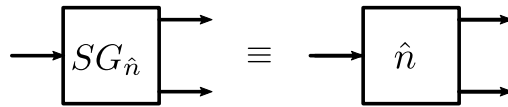


Figura 1.3: Esquema que describe un aparato de Stern Gerlach con el campo magnético orientado en la dirección  $\vec{e}_n$ . El aparato divide el haz incidente en dos haces salientes. El superior tiene proyección de spin  $+\hbar/2$  y el inferior  $-\hbar/2$  en la dirección  $\hat{n}$ . En el experimento de SG original, los haces salientes tienen direcciones oblicuas diferentes, pero en nuestro esquema a la salida representamos haces paralelos. Es decir, el esquema incluye además la rectificación de esos haces por medio campos magnéticos apropiados para lograr sean paralelos entre si.

En este sentido, podemos imaginar hacer una serie de secuencias con aparatos de Stern Gerlach:

1. *Reversibilidad.* La primera secuencia es la secuencia trivial, que no da lugar a ningún resultado sorprendente, pero que pone en evidencia la reversibilidad del proceso de separación de un haz en sus dos componentes de spin. Suponemos al escribir esta secuencia que el proceso de separación en dos haces puede ser revertido. Esto está descrito por la Figura 1.4. El aparato que invierte la acción del primero tiene que tener campos magnéticos apropiadamente elegidos para deshacer la acción de los primeros.



Figura 1.4: Primera secuencia de aparatos de Stern Gerlach. El efecto del campo que separa el haz incidente puede revertirse. La caja que tiene dos entradas y una salida representa la disposición de campos magnéticos que revierte la aplicación del aparato de Stern Gerlach en la dirección  $\hat{n}$ .

2. *Dos SG en la misma dirección.* La segunda secuencia de experimentos de SG tampoco dará lugar a resultados sorprendentes. En efecto, consideremos una sucesión de dos aparatos de SG con el imán orientado en la misma dirección  $\vec{e}_n$ , como en la Figura 1.5. Después del primer aparato bloqueamos el haz asociado a la componente de  $S_n = -\hbar/2$  y hacemos que la otra componente ingrese al segundo aparato. Nos preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de

que una partícula sea detectada a la salida del segundo aparato si salió por el haz superior del primer aparato? El resultado experimental es que dicha probabilidad es igual a 1. O sea,  $\text{Prob}(S_n^{(2)} = +\hbar/2 | S_n^{(1)} = +\hbar/2) = 1$  (la probabilidad de que la segunda medición de  $S_n$  sea  $\hbar/2$  dado que la primera también fue  $\hbar/2$  es igual a la unidad). Experimentalmente, podemos confirmar esto haciendo dos experimentos: primero hacemos un experimento en el que sólo usamos el primer aparato y detectamos el número de partículas (por unidad de tiempo) que llegan a la pantalla por el haz correspondiente a  $S_n = \hbar/2$ . Luego colocamos el segundo aparato y verificamos que el número que llega por el haz superior es idéntico al anterior. Obviamente este mismo resultado se obtiene con una secuencia de dos aparatos de SG con el imán orientado en la misma dirección (cualquiera sea ella).

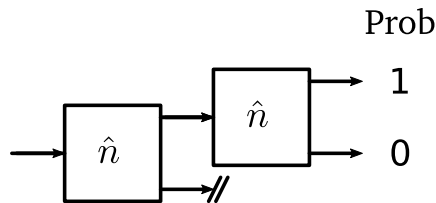


Figura 1.5: Segunda secuencia de aparatos de Stern Gerlach: campos magnéticos orientados la misma dirección.

3. *Dos SG en distintas direcciones.* La tercera secuencia ya es menos trivial que las anteriores. Analizamos una secuencia donde primero tenemos un aparato de SG con el imán alineado en la dirección  $\vec{e}_z$  y luego otro con el imán alineado en la dirección  $\vec{e}_x$ , como muestra la Figura 1.6. Nos hacemos la misma pregunta que antes: ¿Cuál es la probabilidad de que un átomo salga por el haz superior del segundo aparato dado que salió por el haz superior del primero? (la estrategia para medir estas probabilidades es la misma que en el caso anterior: se necesitan dos experimentos). La respuesta experimental es que esta probabilidad es igual a  $1/2$ . Es decir:  $\text{Prob}(S_x^{(2)} = +\hbar/2 | S_z^{(1)} = +\hbar/2) = 1/2$ . En general, si analizamos una secuencia de dos aparatos de SG con imanes orientados en direcciones arbitrarias  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , el resultado de la mencionada probabilidad es  $\text{Prob}(\vec{e}_2 \cdot \vec{S}^{(2)} = +\hbar/2 | \vec{e}_1 \cdot \vec{S}^{(1)} = +\hbar/2) = (1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)/2$ . En el caso direcciones ortogonales  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ , mientras que si son iguales, como en el segunda secuencia  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ .

Este resultado es interesante pero no es imposible de reconciliar con nuestro sentido común. Podemos razonar de la siguiente forma para comprenderlo. El primer aparato de SG filtra las partículas de acuerdo a su componente  $S_z$  y el segundo lo hace de acuerdo a su componente  $S_x$ . El resultado se explica simplemente aceptando la idea de que de todas las partículas que tienen  $S_z = \hbar/2$  la mitad tiene  $S_x = \hbar/2$  y la otra mitad tiene  $S_x = -\hbar/2$ . No sabemos



cuál es el motivo por el que esto podría suceder pero al menos podemos concebir esta imagen sencilla del comportamiento del spin. Notablemente, esta imagen colapsa cuando consideramos la secuencia de tres aparatos de SG.

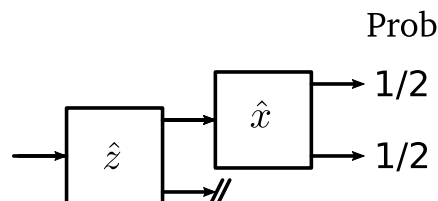


Figura 1.6: Tercera secuencia de SG: El primer aparato sólo deja pasar las partículas con la componente  $S_z = +\hbar/2$ , el segundo analiza el valor de  $S_x$ . Se obtiene que ambos resultados  $\pm\hbar/2$  son equiprobables.

4. *Tres SG.* La cuarta secuencia es crucial. Encadenamos dos aparatos de SG con el imán orientado en la dirección  $\vec{e}_z$  y entre ellos colocamos un tercero con el imán orientado en la dirección  $\vec{e}_x$ , como muestra la Figura 1.7. Tomamos las partículas con  $S_z = \hbar/2$  que salen del primero y luego las que salen del segundo con  $S_x = \hbar/2$ . Si fuera cierto el razonamiento esbozado en el párrafo anterior todas estas partículas deberían tener  $S_z = \hbar/2$  en el último aparato. Es decir que la probabilidad de que las partículas salgan por la rama superior del último aparato, dado que salieron por la rama superior de los dos primeros debería ser igual a 1. Sin embargo, el resultado del experimento no es este. Esa probabilidad resulta ser igual a 1/2. Asimismo, es 1/2 la probabilidad de que las partículas salgan por la rama inferior del último aparato. Es decir:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(S_z^{(3)} = \hbar/2 \mid S_x^{(2)} = \hbar/2 \wedge S_z^{(1)} = \hbar/2) &= 1/2 \\ \text{Prob}(S_z^{(3)} = -\hbar/2 \mid S_x^{(2)} = \hbar/2 \wedge S_z^{(1)} = \hbar/2) &= 1/2 \end{aligned}$$

El resultado es sorprendente. Intercalando un aparato que mide  $S_x$  entre dos aparatos que miden  $S_z$  hacemos aparecer partículas con  $S_z = -\hbar/2$  (la mitad) siendo que si no intercalamos el aparato que mide  $S_x$  no obtenemos partículas en el haz inferior. Este experimento es difícil de comprender pero la mecánica cuántica es capaz de formular un modelo predictivo que describe correctamente el resultado de esta secuencia de experimentos.

5. *Analogía con el experimento de dos rendijas.* Esta última secuencia tiene la notable propiedad de establecer una muy clara analogía con el experimento de las dos rendijas de Young. En efecto, en las secuencias de experimentos de SG, el ingrediente fundamental es la interferencia de ondas de probabilidad. Analizaremos tres secuencias.

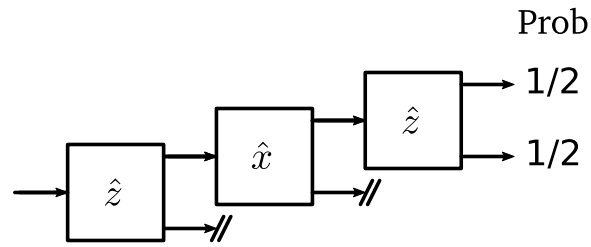


Figura 1.7: Cuarta secuencia de SG: El primer aparato sólo deja pasar las partículas con la componente  $S_z = +\hbar/2$ , el segundo deja pasar aquellas con  $S_x = +\hbar/2$  y el tercero analiza nuevamente el valor de  $S_z$ . Sorprendentemente en el tercer aparato la probabilidad de cada resultado es  $1/2$ .

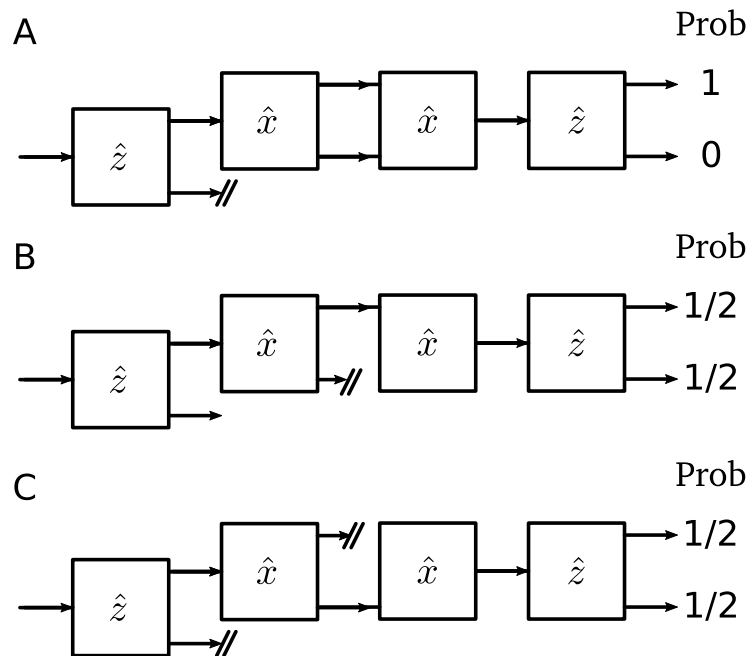


Figura 1.8: Secuencias 5 A,B y C de SG: El primer aparato sólo deja pasar las partículas con la componente  $S_z = +\hbar/2$ . Luego hay una secuencia de tipo 1 (trivial) construida con aparatos que separan el haz según su componente  $S_x$  y lo vuelven a juntar. El tercer aparato analiza el valor de  $S_z$ . Naturalmente el único resultado obtenido es  $S_z = +\hbar/2$  (con probabilidad 1). En el caso B se bloquea el haz inferior entre los aparatos que separan y juntan el haz según su valor de  $S_x$ . En la secuencia C se bloquea el otro haz. En ambos casos, al analizar el valor de  $S_z$  se obtienen resultados equiprobables.

- A El primer caso, que llamaremos A es una variante de los anteriores. Se encadenan dos aparatos de SG con el imán en  $\vec{e}_z$  y entre ellos se colocados SG con el imán en  $\vec{e}_x$  siendo uno el inverso del otro (Figura 1.8).  
 Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores los dos aparatos de

SG con el imán en  $\vec{e}_x$  cancelan mutuamente su efecto. Por lo tanto, la probabilidad de obtener  $S_z = \hbar/2$  en el último SG es 1 y la probabilidad de obtener  $S_z = -\hbar/2$  en ese mismo SG es 0. Todas las partículas salen por el haz superior (o sea que la pantalla está iluminada en este haz) y ninguna sale por el haz inferior (la pantalla queda ensombrecida). Observamos “luz” en la salida superior y “sombra” en la inferior (esta es una metáfora ya que este experimento no se realiza con ondas luminosas).

BC Los otros dos experimentos tienen la misma secuencia que el anterior, tal como se indica en la Figura 1.8. La diferencia es que en el experimento *B* se bloquea el haz superior que sale del primer aparato de SG con el imán orientado en  $\vec{e}_x$  y en el experimento *C* se bloquea el haz inferior. Al bloquear alguno de los dos haces, las partículas que ingresan al último SG tienen  $S_x = -\hbar/2$  en el experimento *B* y  $S_x = \hbar/2$  en el experimento *C*. Por lo tanto al pasar por el último aparato de SG, que analiza el valor de  $S_z$ , la partícula tiene la misma probabilidad (1/2) de salir por cualquiera de los dos haces. Usando la metáfora del párrafo anterior: en ambos haces tenemos “luz” (ya que detectamos la mitad de las partículas en cada haz).

Este experimento es sorprendente. La intuición diría que si al ser separados de acuerdo al valor de  $S_x$  las partículas siguen una trayectoria u otra (la superior o inferior) entonces el resultado de cualquier probabilidad en la etapa final del experimento debería satisfacer la igualdad  $P_A = P_B + P_C$ . ¡Pero esto claramente no se cumple! Cuando los dos caminos están abiertos (no bloqueamos ninguno) observamos sombra en el haz inferior del SG final. En cambio, si alguno de los dos haces está bloqueado (tal como ocurre en los experimentos *B* y *C* observamos “luz” en ambos haces del SG final). Esto es lo mismo que sucede en el experimento de dos rendijas de Young en el que uno puede afirmar que “luz+luz=sombra” ya que hay zonas de la pantalla donde no llegan partículas cuando las dos rendijas están abiertas mientras que si alguna está tapada en esas zonas se registran partículas, es decir  $P_A \neq P_B + P_C$ .

La mecánica cuántica permite formular un modelo que describe adecuadamente los experimentos anteriores, que desafían nuestra intuición. En este modelo el estado del sistema es descrito por un vector en un espacio vectorial complejo de dos dimensiones. ¿Cómo surge este modelo a partir de los resultados de los experimentos mencionados? La forma más natural de entenderlo es observando que existe una analogía directa entre los experimentos mencionados más arriba (secuencias de aparatos de SG) y los que se realizan con luz polarizada. Veremos esto ahora y luego adaptaremos el modelo que describe la luz polarizada para describir al spin.

## 1.5. Analogía con la polarización de la luz

Es importante notar que hay otros experimentos en la física que dan resultados totalmente análogos a los que describimos más arriba para las partículas de spin  $1/2$ . Se trata de experimentos con luz polarizada. Como sabemos, la luz es una onda electromagnética cuyo estado está descrito por un vector campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y otro vector campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . En el caso idealizado de las ondas planas que se propagan en la dirección del vector  $\vec{k}$ , tenemos que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están en el plano perpendicular a  $\vec{k}$ . La luz se dice linealmente polarizada si la dirección del vector  $\vec{E}$  no varía en el tiempo. Obviamente, puede estar polarizada a lo largo de cualquiera de las direcciones del plano perpendicular a  $\vec{k}$ . También la luz puede tener polarización circular, lo que corresponde al caso en el cual el vector  $\vec{E}$  va cambiando de dirección rotando alrededor del eje definido por  $\vec{k}$ . La polarización será circular si las amplitudes de las distintas componentes de  $\vec{E}$  son todas iguales o elíptica cuando cuando estas son diferentes. Para establecer la analogía con el spin, apelaremos primero a la física de los materiales birrefringentes para los cuales el índice de refracción de la luz depende de su polarización. Al entrar en este tipo de materiales, un haz de luz se descompone en dos haces que viajan en distintas direcciones con polarizaciones ortogonales (ver figura 1.9). Es decir, un haz con polarización lineal a lo largo de una dirección cualquiera  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_n$ , cuando ingresa a este material, se divide en dos haces cuyos campos eléctricos son  $\vec{E}_H = E_0 \cos \theta \vec{e}_H$  y  $\vec{E}_V = E_0 \sin \theta \vec{e}_V$ , donde  $\cos \theta = \vec{e}_H \cdot \vec{e}_n$  y  $\sin \theta = \vec{e}_V \cdot \vec{e}_n$ . Un material que tiene este comportamiento y dominó la física de la luz polarizada por años es la Calcita, en el cual la separación entre los haces con distinta polarización es significativa. Alternativamente, hoy existen dispositivos más modernos y simples que separan los haces  $\vec{E}_V$  y  $\vec{E}_H$  en dos direcciones perpendiculares entre si. Su funcionamiento se basa en la física de la reflexión y refracción entre dos materiales dieléctricos según describen las leyes de Fresnel. Estos dispositivos habitualmente tienen forma cúbica y están formados por dos prismas unidos por una superficie especialmente preparada con un material multi capa (ver figura 1.9).

Genéricamente llamamos a estos dispositivos *divisores de haz polarizante* y usamos la sigla *PBS* (por "Polarizing Beam Splitter") para denotarlos (el uso de la sigla *DHP* en castellano podría dar lugar a malas interpretaciones ante permutaciones no cíclicas de las letras). En realidad usaremos la sigla  $PBS_{nn'}$ , en la que los subíndices  $nn'$  indican las direcciones en las que los dos haces salen polarizados (y deben ser tales que  $\vec{e}_n \cdot \vec{e}_{n'} = 0$ ) como indica la Figura 1.10. El divisor de haz  $PBS_{HV}$  refleja la componente polarizada verticalmente y transmite la polarizada horizontalmente. Podemos construir divisores de haz tipo *PBS* que separen los haces en cualquier par de direcciones ortogonales entre si. El  $PBS_{DD'}$  denotará el divisor de haz que separa las direcciones  $D$  y  $D'$  que forman, respectivamente, un ángulo de  $\pi/4$  y  $3\pi/4$  respecto del eje  $H$ . También es posible usar estos dispositivos (combinándolos con láminas retardadoras de cuarto de onda y media onda que agregan un desfase entre las polarizaciones en las direcciones  $H$  y  $V$ ) para construir *PBS*

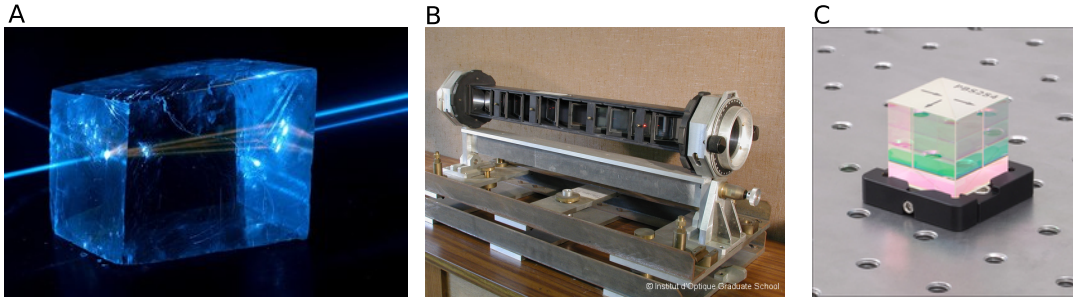


Figura 1.9: Tres tipos de divistores de haz polarizantes. A: Un clásico cristal de calcita (Wikimedia Commons). B: El polarizador multicapas de más de un metro de largo que utilizó Alain Aspect en su experimento de mediciones de desigualdades de Bell en 1981. C: Un polarizador multicapas moderno que funciona con el mismo principio que B pero en una presentación más compacta y práctica. El que se muestra tiene 25 mm de lado (extraído del catálogo de Thorlabs).

que separen un haz de luz en sus componentes de polarización circulares (derecha e izquierda). A estos los denominaremos  $PBS_{+-}$ . Estos dispositivos están ilustrados en la Figura 1.10.

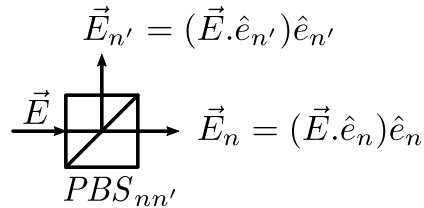


Figura 1.10: Un divisor de haz polarizante  $PBS_{nn'}$  genera dos haces con polarización a lo largo del eje  $\vec{e}_n$  (el transmitido) y del eje  $\vec{e}_{n'}$  (el reflejado).

Es bastante evidente que el divisor de haz  $PBS_{HV}$  juega un rol muy similar al del aparato de SG que separa un haz de acuerdo al valor de  $S_z = \pm \hbar/2$ . La diferencia que salta a la vista es la siguiente: los experimentos que hacemos con luz polarizada (que describiremos más abajo) típicamente se hacen con haces intensos (un láser, por ejemplo). En ese régimen la analogía con las secuencias de aparatos de Stern Gerlach parece tenue ya que en el caso de SG los átomos pasan por el aparato de a uno a la vez (o pueden hacerlo en ese régimen). En ese régimen (de un único átomo presente en el dispositivo) el resultado del último experimento descrito es totalmente anti-intuitivo ya que para explicarlo es necesario abandonar la idea de que los átomos siguen una trayectoria o la otra.

La analogía entre experimentos SG y aquellos con luz polarizada se vuelve completa cuando trabajamos con haces de luz suficientemente atenuados como para poder asegurar que hay un único fotón en el dispositivo. De hecho, los experimentos que describiremos (con luz) se pueden realizar (y se realizan) con fotones

individuales. Tanto sea atenuando haces hasta el punto en que estadísticamente uno puede asegurar de que no hay más que un fotón por vez en el interferómetro, como con fuentes de fotones individuales<sup>1</sup> o de fotones “anunciados”<sup>2</sup>

## 1.6. Equivalencia entre PBS y SG: experimentos de SG con fotones individuales

En la Figura 1.11(A) se muestra el dispositivo fotónico que es totalmente análogo al aparato de Stern Gerlach con el imán orientado en alguna dirección arbitraria (elegimos esta como  $\vec{e}_z$ ). El dispositivo consiste simplemente en un  $PBS_{n'n}$ . Podría ser seguido por un espejo en el haz reflejado para lograr que se mueva en la misma dirección que el transmitido, pero esto no es estrictamente necesario.

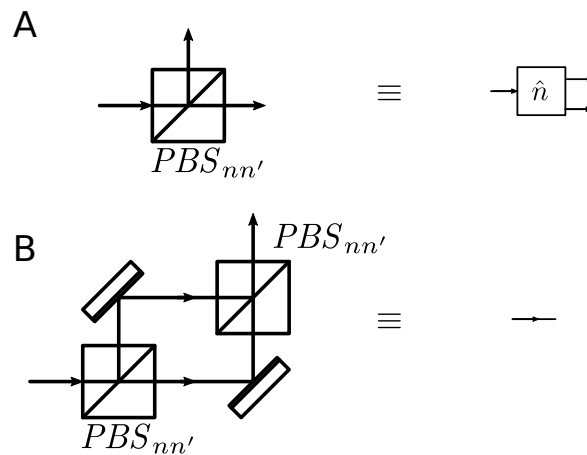


Figura 1.11: A: Equivalencia con el aparato de Stern Gerlach. Un  $PBS_{nn'}$  separa el haz incidente en dos haces con diferentes polarizaciones  $n$  y  $n'$ . B: Reversibilidad del  $PBS$ , redirigiendo los haces con espejos, la acción del primer  $PBS$  es cancelada por otro  $PBS$  a continuación.

La reversibilidad del  $PBS$  es obvia y está mostrada en la Figura 1.11(B), ahora si necesitamos unos espejos para redirigir el haz hacia el segundo  $PBS$ . Allí, la acción

<sup>1</sup>Existen hoy varias tecnologías que buscan generar verdaderas fuentes de fotones individuales en desarrollo. En todas ellas uno busca tener un sistema excitable externamente, que admita una sola excitación y que se desexcite emitiendo siempre un único fotón. Algunos de los sistemas con los que ya se han realizado fuentes exitosas son: átomos únicos atrapados, moléculas únicas sobre superficies, puntos cuánticos, centros de nitrógeno-vacancia en diamante.

<sup>2</sup>Las fuentes de fotones anunciados son de fácil acceso en la actualidad. En esas fuentes se generan pares de fotones, cuyas direcciones de propagación están fuertemente correlacionadas. En esas circunstancias, si se detecta uno de los miembros del par, hay certeza de que otro fotón se propaga en una trayectoria que, originalmente, está bien definida. A partir de ese momento, ese fotón se usa como fotón “anunciado”.

del primer  $PBS$  es cancelada por la del segundo y obviamente el resultado es que el haz no sufre ninguna transformación.

La concatenación de divisores de haz  $PBS$  orientados en distintas direcciones también es sencilla de entender. Por ejemplo, la Figura 1.12 muestra el dispositivo que toma el haz polarizado en la dirección  $V$  (el transmitido en el  $PBS_{HV}$  y lo hace pasar por un  $PBS_{DD'}$ ). En este caso, las leyes de la óptica clásica (las leyes de Malus) nos dicen que la intensidad de cada haz saliente del  $PBS_{DD'}$  será la mitad de la intensidad entrante. Cuando repetimos el experimento con fotones individuales veremos que la mitad de los fotones va a parar a cada uno de los detectores ubicados a la salida del  $PBS_{DD'}$ . Esta secuencia es análoga a la analizada en tercer lugar con aparatos de SG (un SG con el imán en  $\vec{e}_z$  seguido por otro con el imán orientado en  $\vec{e}_x$ ).

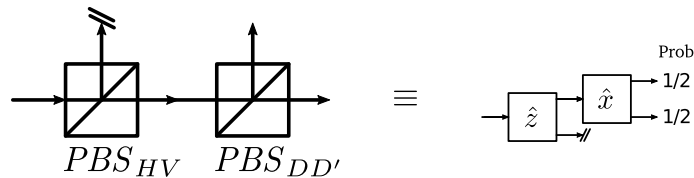


Figura 1.12: Secuencia de  $PBS$  orientados en diferentes direcciones se puede entender a partir de las leyes clásicas de Malus.

Veamos ahora la concatenación de tres divisores  $PBS$  (Figura 1.13). El primero es un  $PBS_{HV}$  con la componente  $H$  bloqueada. Este  $PBS$  cumple una única función: prepara un estado con polarización  $V$  que ingresa al segundo un  $PBS_{DD'}$  con la componente  $D$  bloqueada y el tercero un nuevo  $PBS_{HV}$ . Esta secuencia es totalmente análoga a la concatenación de aparatos de SG analizada en cuarto lugar: El resultado de esta secuencia de  $PBS$  puede comprenderse perfectamente a partir del modelo que acepta que el campo eléctrico es un vector en el plano perpendicular a la dirección de propagación y que cada uno de los  $PBS$  separa el haz de acuerdo a sus componentes en un par de direcciones ortogonales en dicho plano (el caso de la polarización circular es análogo). Entonces, cada uno de los detectores ubicados a la salida del segundo  $PBS_{HV}$  detectarán la mitad de los fotones. O sea, introduciendo un aparato que filtra la componente  $D$ , generamos fotones con polarización  $H$ , que están ausentes en el estado entrante al segundo divisor (ya que fueron filtrados por el primer  $PBS$ . Este resultado no es difícil de aceptar si pensamos a la luz como una onda electromagnética. Sin embargo, si pensamos a la luz como partículas que llamamos fotones, la física clásica de no nos permitiría explicar los resultados obtenidos.

El quinto ejemplo de concatenación corresponde, literalmente, a un experimento de dos rendijas con luz (en el régimen de fotones individuales). Este está ilustrado en la Figura 1.14A. El primer  $PBS_{HV}$  prepara un estado con polarización  $V$ . Este fotón ingresa al  $PBS_{DD'}$  que separa el haz en esas dos componentes. Luego de ser reflejados en sendos espejos perfectos, los fotones entran al  $PBS_{D'D}$  que invierte

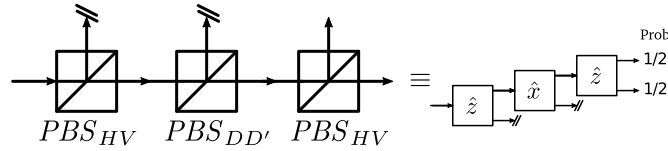


Figura 1.13: Una secuencia de dos  $PBS$  que dividen un haz en dos direcciones que forman un ángulo de 45 grados. La intensidad del haz en cada una de las salidas del último  $PBS$  es la mitad de la entrante en él.

la acción del anterior. Tal como vimos más arriba el efecto de estos dos  $PBS$  se cancela y el fotón sale por la rama horizontal en el mismo estado en el que entró. Por lo tanto, al ingresar al nuevo  $PBS_{HV}$  siempre es transmitido (tiene polarización  $V$ ): la probabilidad de detectar fotones con polarización horizontal (en el detector  $D_H$  es cero). Sin embargo, si bloqueamos alguno de los dos caminos (Figura 1.14B) entre los  $PBS_{DD'}$  y  $PBS_{D'D}$  (que están en una configuración de interferómetro de Mach Zender) la situación cambia drásticamente. El fotón ingresará al último  $PBS_{HV}$  con polarización diagonal ( $D$  o  $D'$ ) y por lo tanto tendrá probabilidad  $1/2$  de ser detectado por cada uno de los detectores. La probabilidad de detectar fotones con polarización  $H$  es distinta de cero cuando algún camino está cerrado pero se hace igual a cero cuando ambos están abiertos: ¡luz+luz=sombra! Claramente, el experimento muestra que el fotón, que es detectado como partícula no viaja siguiendo una única trayectoria sino todas las posibles. Este experimento pone en evidencia el misterio central de la mecánica cuántica.

## 1.7. ¿Cómo describir el estado de un spin 1/2?

Para formular un modelo que prediga correctamente los resultados de los experimentos con secuencias de aparatos de SG podemos copiar casi textualmente el modelo usado para describir los experimentos con la polarización de la luz. El modelo para la luz es el siguiente: El estado del campo eléctrico se describe con un vector  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  que es siempre perpendicular a la dirección de propagación (el magnético es perpendicular a  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ). Cuando un haz de luz caracterizado por un campo  $\vec{E}$  incide en un  $PBS_{nn'}$  se generan dos haces. En cada uno de los haces salientes el campo eléctrico es la proyección del campo incidente en la dirección  $\vec{e}_n$  (el reflejado) y  $\vec{e}_{n'}$  (el transmitido). La intensidad del haz reflejado es  $|\vec{E} \cdot \vec{e}_n|^2$ , o sea que el cociente entre la intensidad incidente ( $I_0 = |\vec{E}|^2$ ) y la reflejada es  $I_R/I_0 = (|\vec{E} \cdot \vec{e}_n|/|\vec{E}|)^2 = \cos^2 \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado entre el campo incidente y la dirección  $\vec{e}_n$  (esta es la ley de Malus para la luz polarizada). Es evidente que si el campo incidente está polarizado en la dirección  $\vec{e}_n$  toda la intensidad será reflejada y el haz transmitido por el  $PBS_{nn'}$  tendrá intensidad nula.

Hagamos entonces una copia de este modelo para describir el estado de un spin 1/2. Diremos entonces que para un spin, entonces, el estado estará descrito por un vector  $\vec{\phi}$  (que puede variar en el tiempo). Este vector pertenece a un espacio



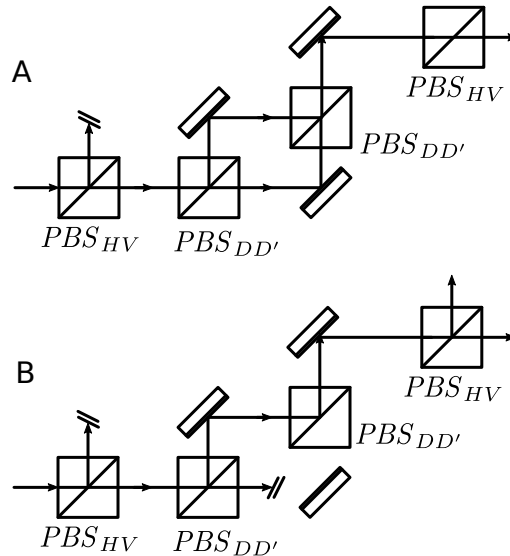


Figura 1.14: Dos experimentos de interferencia con luz polarizada. En A, la luz horizontalmente polarizada preparada por el primer  $PBS_{HV}$  ingresa al interferómetro de Mach Zender, luego los haces se recombinan y la polarización del haz saliente es idéntica a la del haz incidente. En B, la luz horizontalmente polarizada preparada por el primer  $PBS_{HV}$  ingresa al interferómetro de Mach Zender, uno de los haces se bloquea y la polarización del haz saliente es entonces D'.

vectorial de dimensión 2 que, como veremos, tiene que ser complejo. Al pasar por un aparato de SG un haz descrito por este estado se descompone en dos haces, cada uno de los cuales está asociado a las dos salidas del SG. El haz superior está descrito por un estado que llamaremos  $\vec{0}_n$  y el haz inferior estará preparado en otro estado,  $\vec{1}_n$ . Cuando el sistema está preparado en alguno de estos dos estados y se lo hace incidir sobre un nuevo aparato de SG con el imán orientado en la misma dirección, se obtiene un único resultado ( $+\hbar/2$  para  $\vec{0}_n$  y  $-\hbar/2$  para  $\vec{1}_n$ ).

El modelo se completa, tal como en el caso de la polarización de la luz, con una forma de calcular la probabilidad de que si el haz entrante está preparado en el estado  $\vec{\phi}$ , el sistema salga por el haz superior o por el inferior (con lo que diremos que el resultado de la medición de  $S_n$  es, respectivamente  $\pm\hbar/2$ ). Diremos que esas probabilidades deben calcularse, tal como en el caso de la luz polarizada, tomando el módulo al cuadrado de la proyección del estado del haz entrante  $\vec{\phi}$  sobre los estados asociados a cada uno de los haces salientes. O sea:  $\text{Prob}(S_n = \hbar/2 | \vec{\phi}) = |\vec{0}_n \cdot \vec{\phi}|^2$  y  $\text{Prob}(S_n = -\hbar/2 | \vec{\phi}) = |\vec{1}_n \cdot \vec{\phi}|^2$ . Cabe aclarar que no estamos usando la notación usual de la mecánica cuántica en la que los vectores se denotan como "kets":  $\vec{\phi} \rightarrow |\phi\rangle$  (esa es la notación de Dirac).

Si aceptamos estas ideas sencillas, tenemos un modelo que permite describir adecuadamente los resultados de experimentos de SG. Pero estos resultados imponen restricciones y características fundamentales al modelo. Veamos, por ejemplo,

que de los experimentos consistentes en secuencias de aparatos de SG surge no solamente que la dimensión del espacio debe ser igual a 2 sino también que este espacio debe ser complejo.

## 1.8. Propiedades del modelo

1. ¿Por qué la dimensión del espacio de estados es igual a 2?. En el modelo aceptamos dos hechos fundamentales: 1) Cada vez que analizamos nuestro sistema con un aparato de SG con el imán orientado en una dirección arbitraria obtenemos dos resultados (y sólo dos). El número de resultados distintos en esta medición es una propiedad que caracteriza al sistema y, necesariamente, tiene que ser igual a la dimensión del espacio de estados físicos.

En efecto, el modelo acepta el hecho de que hay un estado asociado a cada uno de los haces que salen de un aparato de SG que mide  $S_n$ . Estos estados los denominamos  $\vec{0}_n$  y  $\vec{1}_n$ . Los datos experimentales nos fuerzan a aceptar el hecho de que estos estados deben ser vectores ortonormales. La ortogonalidad de estos vectores surge de que  $|\vec{0}_n \cdot \vec{1}_n|^2$  es la probabilidad de medir  $S_n = +\hbar/2$  dado que en el  $SG_n$  ingresó el estado  $\vec{1}_n$ . Esta probabilidad, como discutimos más arriba, es nula, de donde surge que estos estados deben ser ortogonales. La normalización de los estados es también una consecuencia del modelo y de los datos experimentales. En efecto  $|\vec{0}_n \cdot \vec{0}_n|^2$  es la probabilidad de detectar el valor  $+\hbar/2$  en la medición de  $S_n$  dado que el estado entrante es  $\vec{0}_n$ , que, como vimos, es igual a la unidad.

En general, la dimensión del espacio de estados de un sistema es siempre igual al número de resultados distintos que se obtienen en una medición exhaustiva del sistema. La pregunta que podemos hacer es obvia: ¿Cómo sabemos que una medición es realmente exhaustiva? La respuesta es: no lo sabemos. Hacemos un modelo que, luego de interrogar al sistema con todo el instrumental que está a nuestra disposición (y con toda la imaginación de la que disponemos para proponer experimentos). Evidentemente, el modelo es siempre provisorio ya que podemos encontrar en el futuro nuevos grados de libertad, con lo cual la dimensión del espacio de estados deberá cambiar. El modelo es considerado válido mientras no sea contradicho por los resultados experimentales.

2. El espacio debe ser complejo. Teniendo en cuenta lo anterior, cada aparato de SG divide un haz en dos, y el sistema saliente en cada uno de ellos está preparado en un estado que debe ser ortogonal al estado asociado al otro haz. En consecuencia, cada aparato de SG define una base ortonormal del espacio de estados. En efecto, para toda dirección  $\vec{e}_n$ , el conjunto de estados  $B_n = \{\vec{0}_n, \vec{1}_n\}$  es una base ortonormal.

Consideremos las tres bases  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  asociadas a las tres direcciones cartesianas (perpendiculares entre si)  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  y  $\vec{e}_z$ . Los experimentos de SG des-

criptos anteriormente nos dicen que estas bases deben tener una propiedad muy importante: deben ser mutuamente “no sesgadas”. Esto es: si preparo algún vector de alguna de estas bases (por ejemplo  $\vec{0}_x$ ) y mido la probabilidad de obtener  $\pm\hbar/2$  en cualquiera de las otras dos direcciones ortogonales, ese resultado debe ser siempre igual a  $1/2$ . Es decir:  $|\vec{j}_n \cdot \vec{j}_{n'}|^2 = 1/2$  para todo  $j, j' = 0, 1$  siempre que sea  $n \neq n'$  (o sea que  $|\vec{0}_x \cdot \vec{1}_y|^2 = |\vec{1}_x \cdot \vec{0}_z|^2 = 1/2$ , etc). Esta condición impone que el espacio vectorial debe ser complejo, lo que puede verse de la siguiente manera. Tomemos la base  $B_z$  y escribamos los vectores de  $B_x$  como combinación lineal de ellos:

$$\begin{aligned}\vec{0}_x &= \alpha \vec{0}_z + \beta \vec{1}_z \\ \vec{1}_x &= \gamma \vec{0}_z + \delta \vec{1}_z\end{aligned}$$

La condición de normalización implica que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y  $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ . Asimismo, la condición de que las bases  $B_x$  y  $B_z$  sean “no sesgadas” implica que todos los coeficientes en módulo deben ser idénticos a  $1/\sqrt{2}$ . En efecto,  $|\alpha|^2 = |\vec{0}_z \cdot \vec{0}_x|^2 = 1/2$ , etc. En consecuencia, la anterior combinación lineal puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{0}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi_1} \vec{0}_z + e^{i\phi_2} \vec{1}_z) \\ \vec{1}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi_3} \vec{0}_z + e^{i\phi_4} \vec{1}_z).\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, en cada uno de los estados anteriores, podemos tomar una de estas fases iguales a 0. Esto equivale a redefinir a cada uno de los estados  $\vec{0}_x$  y  $\vec{1}_x$ , los que siempre están definidos a menos de una fase global (surge del hecho de que todas las predicciones físicas son independientes de una fase global ya que sólo dependen del módulo del producto escalar entre estados). Por lo tanto podemos elegir  $\phi_1 = \phi_3 = 0$ . La condición de ortonormalidad entre  $\vec{0}_x$  y  $\vec{1}_x$  implica que debe cumplirse que  $0 = 1 + \exp(i(\phi_2 - \phi_4))$ , o sea que  $\phi_2 - \phi_4 = \pi$ . Podemos encontrar soluciones a esta ecuación de modo tal que todos los coeficientes sean reales. En efecto, si hacemos esto, la solución es  $\phi_2 = 0$  y  $\phi_4 = \pi$  (o viceversa). Entonces, sin pérdida de generalidad podemos escribir la relación entre los vectores de  $B_x$  y  $B_z$  como

$$\begin{aligned}\vec{0}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z + \vec{1}_z) \\ \vec{1}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z - \vec{1}_z).\end{aligned}$$

De lo anterior surge que esta es la única solución con coeficientes reales (ya que la otra es simplemente una permutación de los dos vectores). Si repetimos el argumento anterior con los vectores de la base  $B_y$  podemos escribirlos,

sin pérdida de generalidad, como

$$\begin{aligned}\vec{0}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z + e^{i\phi'_2} \vec{1}_z) \\ \vec{1}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z + e^{i\phi'_4} \vec{1}_z).\end{aligned}$$

La ortogonalidad de estos estados nuevamente implica que debe valer la condición  $\phi'_2 - \phi'_4 = \pi$ . Por otra parte, si imponemos las condiciones  $|\vec{0}_x \cdot \vec{0}_y|^2 = 1/2$  obtenemos que debe cumplirse que  $|1 + \exp(i\phi'_2)|^2 = 2$  (y análogamente con  $\phi'_4$ ). De aquí es inmediato ver que las únicas soluciones posibles son  $\phi'_2 = \pm\pi/2$  (y  $\phi'_4 = \mp\pi/2$ ). En consecuencia, podemos tomar  $\phi'_2 = \pi/2 = -\phi'_4$ , de donde

$$\begin{aligned}\vec{0}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z + i \vec{1}_z) \\ \vec{1}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{0}_z - i \vec{1}_z),\end{aligned}$$

En conclusión, el espacio de estados debe ser complejo para permitir que existan al menos tres bases mutuamente no sesgadas, como  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$ . Es posible demostrar además que en cualquier espacio vectorial complejo con dimensión  $d$  hay a lo sumo  $d + 1$  bases no sesgadas. En consecuencia, el modelo propuesto “predice” que no existen otras direcciones  $\vec{e}_n$  de modo tal que la base asociada sea no sesgada con  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$ .

## 1.9. Observables y operadores

Hasta aquí, hemos descripto la forma de representar a los estados y también hemos descripto la manera en que podemos calcular probabilidades para cada resultado de un experimento en el caso de la polarización y del spin. Esto último, como vimos, se realiza de la siguiente forma: si medimos una componente de  $S_n$  siempre tenemos dos posibles resultados  $\pm\hbar/2$ . Cada uno de estos resultados tiene un estado asociado: el vector  $\vec{0}_n$  es aquel que describe al estado que cumple con que la medición de  $S_n$  da un único resultado con probabilidad 1 (y el otro con probabilidad 0).

Vemos claramente que una propiedad observable de spin (su componente  $S_n$ ) tiene que estar representada por un objeto matemático tal que a dos vectores ortogonales les asigne dos números reales diferentes (los resultados de la medición). El objeto matemáticamente más simple que hace esto es, precisamente un operador lineal. En efecto, definimos el operador  $\hat{S}_n$  como aquel operador tal que  $\hat{S}_n \vec{0}_n = \frac{\hbar}{2} \vec{0}_n$  y  $\hat{S}_n \vec{1}_n = -\frac{\hbar}{2} \vec{1}_n$ . Esto define completamente al operador  $\hat{S}_n$  ya que nos dice cómo actúa en la base de vectores  $B_n = \{\vec{0}_n, \vec{1}_n\}$ . Por ejemplo, el operador  $\hat{S}_z$  en la base  $B_z$  resulta ser

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Podemos calcular fácilmente cómo actúa el operador  $\hat{S}_x$  en la base  $B_z$ . Para esto basta con revertir algunas de las expresiones anteriores para demostrar fácilmente que  $\hat{S}_x \vec{0}_z = \vec{1}_z$  y  $\hat{S}_x \vec{1}_z = \vec{0}_z$ . Haciendo lo mismo con  $\hat{S}_y$  obtenemos que las matrices de estos operadores en la base  $B_z$  son

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

En lo que sigue usaremos la definición de las matrices de Pauli  $\sigma_j$  ( $j = x, y, z$ ) como aquellas que cumplen que  $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2} \sigma_j$ . Estas matrices son

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

y tienen propiedades muy importantes, que usaremos a lo largo del curso. En particular, satisfacen las siguientes relaciones:

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}, \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l. \quad (1.4)$$

En muchas ocasiones usaremos la notación  $\vec{\sigma}$  para denotar a un vector de tres operadores:  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . De estas propiedades se deduce simplemente que para cualquier vector  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  vale

$$(\vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma})(\vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \mathbb{1} + i(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \cdot \vec{\sigma}. \quad (1.5)$$

Dejamos para más adelante la demostración de que de todo lo antedicho surge naturalmente el resultado general obtenido en una secuencia de aparatos de SG en la cual el primero está orientado en la dirección  $\vec{e}_n$  y el segundo en  $\vec{e}_{n'}$  (que, como adelantamos tiene resultados  $\pm\hbar/2$  con probabilidades  $(1 \pm \vec{e}_n \cdot \vec{e}_{n'})/2$ ).

Por último, en el modelo esbozado hasta aquí el proceso de medición es siempre visto como un proceso de filtrado en el cual el sistema interactúa con algún aparato que tiene otros grados de libertad (en el caso del SG el spin interactúa con la posición del átomo por vía del Hamiltoniano de interacción  $H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(z)$ ). Hasta aquí simplemente hemos descrito esta interacción de manera muy simplificada dando por entendido que los distintos valores del observable a medir dan lugar a distintos haces en los cuales el sistema queda preparado en los estados correspondientes (cada uno de los cuales corresponde a un resultado diferente de la propiedad medida).

## 1.10. Los experimentos que no se realizan no tienen resultados

La mecánica cuántica nos dice que el extraño modelo que esbozamos más arriba es universalmente aplicable. Todo sistema físico debe ser descrito de la misma manera. Sus estados son vectores, sus propiedades observables son operadores etc.

Es un modelo extraño y antiintuitivo que, como discutiremos a lo largo del curso, impone una visión radicalmente distinta sobre la naturaleza que aquella que caracterizaba a la ciencia pre-cuántica. En efecto, nunca antes de la mecánica cuántica la física se había planteado una limitación epistemológica tan fuerte como la que caracteriza a este modelo: siempre se había pensado que los objetos que componen el Universo no solamente pueden ser caracterizados por propiedades mensurables (o sea, propiedades que toman valores susceptibles de ser medidos experimentalmente). También, la física siempre aceptó aquello cuya validez resulta obvia a partir de nuestro sentido común: todas las propiedades de un objeto deberían poder determinarse simultáneamente. Por supuesto, la determinación simultánea de los valores de todas las propiedades de un objeto podría ser una tarea técnicamente difícil. Pero las dificultades técnicas o instrumentales son siempre vistas como desafíos, como obstáculos que podemos intentar superar.

En cambio, la mecánica cuántica plantea, como veremos, que no todas las propiedades observables de un sistema pueden ser medidas simultáneamente. Suele afirmarse que en realidad lo que sucede es que la medición de un observable afecta el valor de cualquier otro que sea incompatible con el anterior. Pero esa visión es superficial y, tal vez, está demasiado atada a la historia y no a los principios de la mecánica cuántica. Discutiremos este punto cuando hablemos sobre el principio de indeterminación pero adelantamos algo que puede servir como motivación, para invitarlos a reflexionar: La mecánica cuántica no afirma que la medición de un observable afecta el valor de otro complementario. Dice algo mucho más radical y antiintuitivo: Afirma que ninguna propiedad observable toma valores antes de ser medida (y la medición es un proceso de interacción).

La consigna: “los experimentos que no se realizan no tienen resultados” es probablemente la más indigerible de todas las “consignas cuánticas”. A lo largo del curso veremos maneras contundentes de demostrar su validez. Como simple ilustración veamos un caso hipersimplificado: Consideremos una partícula de spin  $1/2$ . Sabemos que la medición de cualquier componente del spin da como resultado los valores  $\pm\hbar/2$ . Tomemos tres direcciones  $\vec{e}_{n_1}, \vec{e}_{n_2}, \vec{e}_{n_3}$  que forman un ángulo de  $120^\circ$  entre si, tal como indica la figura (de modo tal que  $\vec{e}_{n_1} + \vec{e}_{n_2} + \vec{e}_{n_3} = 0$ ). Supongamos que en la naturaleza las tres propiedades  $S_{n_{1,2,3}}$  están definidas antes de que las midamos (aceptamos que la medición de una podría eventualmente afectar el valor de la otra). Y aceptemos dos hipótesis adicionales: a) que los valores existentes son idénticos a los medidos (o sea, son  $\pm\hbar/2$ ) y b) Los valores existentes están relacionados entre si por las mismas relaciones funcionales que los observables que los representan (hipótesis que se conoce con el nombre de “consistencia funcional”). Evidentemente, con estas hipótesis llegamos a la siguiente contradicción: Como los observables satisfacen  $\hat{S}_{n_1} + \hat{S}_{n_2} + \hat{S}_{n_3} = 0$ , la misma relación debería cumplirse para los valores existentes, que tienen que tomar valores  $\pm\hbar/2$ . Sin embargo, ¡nunca es posible sumar tres cantidades que toman valores  $\pm\hbar/2$  y obtener cero como resultado!

Veremos unos cuantos ejemplos más sobre las paradojas (o pseudo paradojas) a las que se llega si se supone que los valores de las propiedades observables toman valores antes de ser medidos. Y lo haremos relajando las hipótesis anteriores (que

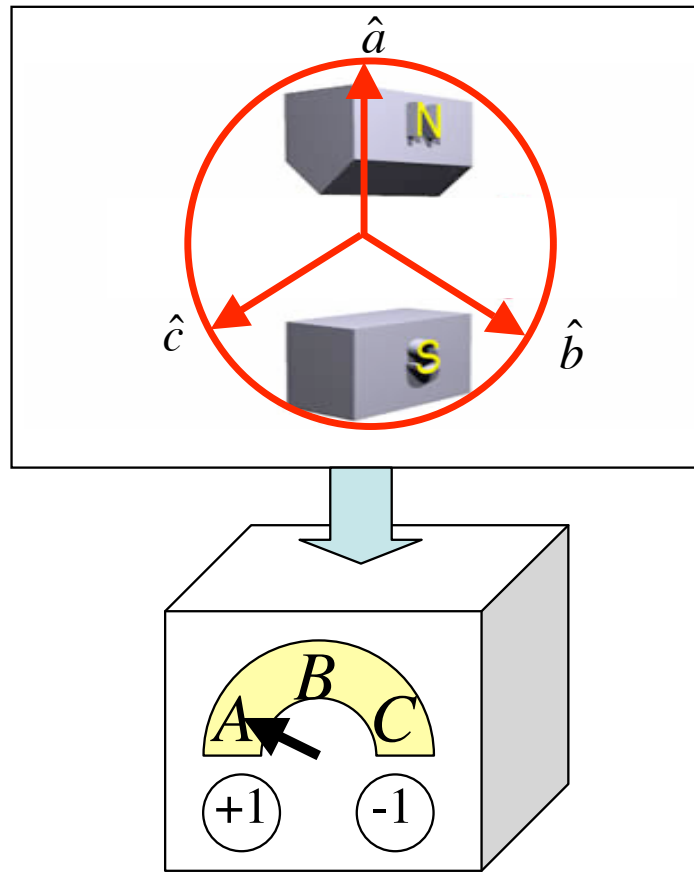


Figura 1.15: Podríamos medir el spin en alguna de tres direcciones  $\vec{e}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  que formen un ángulo de  $120^\circ$  entre si. Como  $\sum_j \vec{e}_j = 0$ , debería cumplirse que  $\sum S_j = 0$  si  $S_j = \vec{S} \cdot \vec{e}_j$ . Sin embargo, no es posible lograr que esta ecuación se satisfaga si tomamos  $S_j = \pm \hbar/2$ . Esto es un ejemplo más que nos muestra que la mecánica cuántica es incompatible con la idea de que las propiedades observables de un sistema toman valores bien definidos antes de la medición. Los experimentos que no se realizan no tienen resultados. Imagen extraída de: <https://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/SternGerlach/SternGerlach.html>

pueden ser cuestionadas por varios motivos).